

**Università degli Studi di Padova**  
**Facoltà di Scienze Politiche**  
**Corso di Laurea Magistrale in Economia Internazionale**  
***Curriculum* Economia Politica Internazionale**



**STATISTICA (corso progredito)**

**Dinamiche di diffusione in Italia di un amplificatore  
musicale: il caso Markbass**

*Abstract:* Il presente elaborato si propone di studiare il ciclo di vita del Mini CMD 121P, un amplificatore per basso del marchio Markbass, attraverso l'applicazione alla serie storica delle vendite mensili dello stesso di una serie di modelli previsionali appartenenti alla famiglia del modello di Bass, o da esso derivati. Obiettivo di tale studio è l'individuazione della fase del ciclo di vita in cui è attualmente inserito il prodotto tramite la stima del suo mercato potenziale – e conseguentemente del suo mercato residuo; inoltre, per mezzo degli strumenti statistici impiegati, è stato possibile fornire una serie di valutazioni relative alla tipologia degli acquirenti effettivi e potenziali.

Ganau Roberto  
Maniglia Michele  
Vanino Enrico  
Variola Massimo

**Anno Accademico 2010/2011**



## INDICE

Introduzione .....	p. 3
Capitolo 1 - Il settore degli strumenti musicali ed il caso Markbass .....	p. 5
1.1 Il mercato degli strumenti musicali .....	p. 5
1.2 L'impresa: Parsek S.r.l. ....	p. 9
1.3 Il prodotto: amplificatore per basso elettrico Mini CMD 121P .....	p. 10
Capitolo 2 – Analisi statistica del ciclo di vita del prodotto .....	p. 11
2.1 Analisi dei dati istantanei: il modello di Norton e Bass (N&B) .....	p. 12
2.1.1 Considerazioni sull'analisi dei dati istantanei .....	p. 17
2.2 Analisi dei dati cumulati .....	p. 18
2.2.1 Il modello standard di Bass .....	p. 18
2.2.2 Il modello di Bass generalizzato (GBM) .....	p. 23
2.2.2.1 Il GBM con uno shock esponenziale .....	p. 23
2.2.2.2 Il GBM con uno shock esponenziale e uno shock rettangolare .....	p. 27
2.2.3 Considerazioni sull'analisi dei modelli della famiglia di Bass .....	p. 32
2.2.4 Il modello Guseo-Guidolin .....	p. 33
2.2.4.1 Considerazioni sull'analisi del modello Guseo-Guidolin .....	p. 38
Conclusioni .....	p. 39
Appendice statistica .....	p. 41
Bibliografia .....	p. 49



## INTRODUZIONE

Il presente elaborato si propone di realizzare uno studio di tipo statistico della serie storica della vendite mensili di un amplificatore per basso di tipo combo del marchio Markbass.

Lo studio del ciclo di vita del suddetto prodotto è stato realizzato con l'ausilio del software di elaborazione statistica Statgraphics Centurion XVI, e in particolare tramite l'applicazione alla serie storica delle vendite di una serie di modelli previsionali, quali il modello di Norton e Bass (N&B) [Norton, Bass, 1987], il modello standard di Bass (BM) [Bass, 1969; Guseo, 2004a, 2004b], il modello di Bass generalizzato (GBM) [Bass, Krishnan, Jain, 1994; Guseo, 2004a, 2004b] e il modello Guseo–Guidolin (GuGu) [Guseo, Guidolin, 2009, 2011], nonché dei modelli appartenenti alla famiglia ARMA [Pankratz, 1991; Piccolo, 1990].

Obiettivo ultimo dello studio condotto è stato valutare – a partire dal volume di vendite già realizzate – il mercato potenziale del prodotto, così da poter stimare con rigore statistico il suo mercato residuo, nonché individuare l'incidenza e la tipologia delle strategie comunicative messe in atto dall'impresa Parsek S.r.l., l'impresa proprietaria del marchio Markbass e produttrice del prodotto oggetto di studio.

Ai fini della realizzazione dello studio, ed in particolare della spiegazione di taluni dei risultati statistici ottenuti, è stata rilevante la collaborazione fornita dall'impresa nella persona del Direttore commerciale.

In particolare, il primo capitolo del presente elaborato offre una – seppur concisa – analisi del mercato degli strumenti musicali in Italia e negli altri principali paesi produttori, una breve presentazione dell'impresa Parsek S.r.l., e una scheda riassuntiva del prodotto oggetto dell'analisi statistica. Nel secondo capitolo l'attenzione è stata invece interamente dedicata all'analisi statistica della serie storica delle vendite del prodotto e al commento dei risultati così ottenuti; l'analisi statistica è stata inoltre arricchita da una trattazione di carattere teorico presentata in Appendice a questo elaborato.



## **CAPITOLO 1**

### **IL SETTORE DEGLI STRUMENTI MUSICALI ED IL CASO MARKBASS**

#### **1.1 Il mercato degli strumenti musicali**

Il mercato degli strumenti musicali deve essere studiato come parte della più ampia filiera del settore musicale che, seguendo la classificazione adottata da Dismamusica<sup>1</sup>, può essere distinta in due sottosettori: il “piccolo” settore della musica e il “grande” settore della musica.

Il “piccolo” settore della musica racchiude i mercati della produzione musicale (cui principali attori sono compositori, autori, artisti, interpreti ed esecutori), dell’intermediazione (editoria, discografia, distribuzione fisica e digitale), e del consumo (musica su supporto fisico e digitale, radio, tv e discoteche, bar, negozi e palestre, musica dal vivo). Nel “grande” settore della musica rientrano invece sia il “piccolo” settore, sia quattro ulteriori specifici mercati: il mercato della musica stampata (spartiti e libri didattici), il mercato degli strumenti musicali e il mercato della formazione (scuole di musica), che si collocano a monte del processo produttivo e possono essere considerati come fornitori degli input necessari alle successive fasi di creazione della musica, e il mercato audio dell’elettronica di consumo (stereo, lettori mp3, lettori cd, autoradio) [IULM, 2008].

Ponendo particolare attenzione al mercato degli strumenti musicali, i prodotti ad esso riconducibili si articolano in due macrocategorie: gli strumenti in senso stretto e gli apparati. Tra gli strumenti in senso stretto rientrano pianoforti e tastiere portatili, strumenti a corda acustici ed elettrici, strumenti a percussione, strumenti ad arco, strumenti a fiato, sintetizzatori e fisarmoniche. La seconda macrocategoria comprende invece tutti quegli apparati che sono funzionali all’utilizzo degli strumenti stessi, come ad esempio strumenti didattici, accessori, edizioni musicali, nonché apparecchiature tecniche (quali processori di segnale e registratori), microfoni ed amplificatori [Centro ASK, 2007].

Per quanto concerne il settore italiano della produzione di strumenti musicali, esso risulta caratterizzato da una consolidata tradizione in termini di qualità, riconducibile da un lato alle numerose imprese di piccole dimensioni concentrate all’interno di distretti industriali cresciuti attorno a tale specializzazione produttiva – come per esempio il distretto delle fisarmoniche di Recanati-Castelfidardo, il distretto dei liutai di Cremona –, dall’altro lato alla presenza sul territorio nazionale di produttori di grandi dimensioni che hanno intrapreso una strategia di tipo multinazionale, sviluppando alleanze e *joint ventures* produttive e/o commerciali con produttori, importatori e distributori esteri [Centro ASK, 2007].

---

<sup>1</sup> Dismamusica, fondata nel 1982, è l’Associazione italiana dei produttori e distributori di strumenti musicali, edizioni musicali e accessori. Suoi tre principali obiettivi possono esseri individuati nella promozione di “iniziative atte a conseguire una disciplina giuridica e fiscale che meglio tuteli le specifiche funzioni delle aziende della categoria”, nella promozione di “iniziative a carattere didattico e culturale idonee alla diffusione degli strumenti musicali”, nella promozione e nello sviluppo di “contatti con Associazioni nazionali ed estere consimili, specialmente nell’area del MEC”. Inoltre Dismamusica offre una serie di servizi a sostegno del mercato, quali la realizzazione di studi delle dinamiche dei consumi e della distribuzione, la divulgazione scientifica sui benefici della pratica musicale, l’organizzazione di incontri tra gli operatori del mercato [<http://www.dismamusica.it/index.php/presentazione>].

Il mercato italiano degli strumenti musicali, in termini di vendite (Tabella 1), ha registrato negli ultimi anni un andamento positivo, superando nel 2009 i 400 milioni di Euro. Particolare attenzione deve essere rivolta al sottomercato degli amplificatori per strumenti – di interesse, in quanto vi rientra il prodotto oggetto dello studio statistico svolto – che nel 2009 ha registrato un valore delle vendite pari a circa 34 milioni di Euro (119.801 unità vendute), caratterizzandosi per una notevole crescita rispetto al 2006, anno in cui le vendite hanno registrato un valore di circa 22 milioni di Euro (74.280 unità vendute).

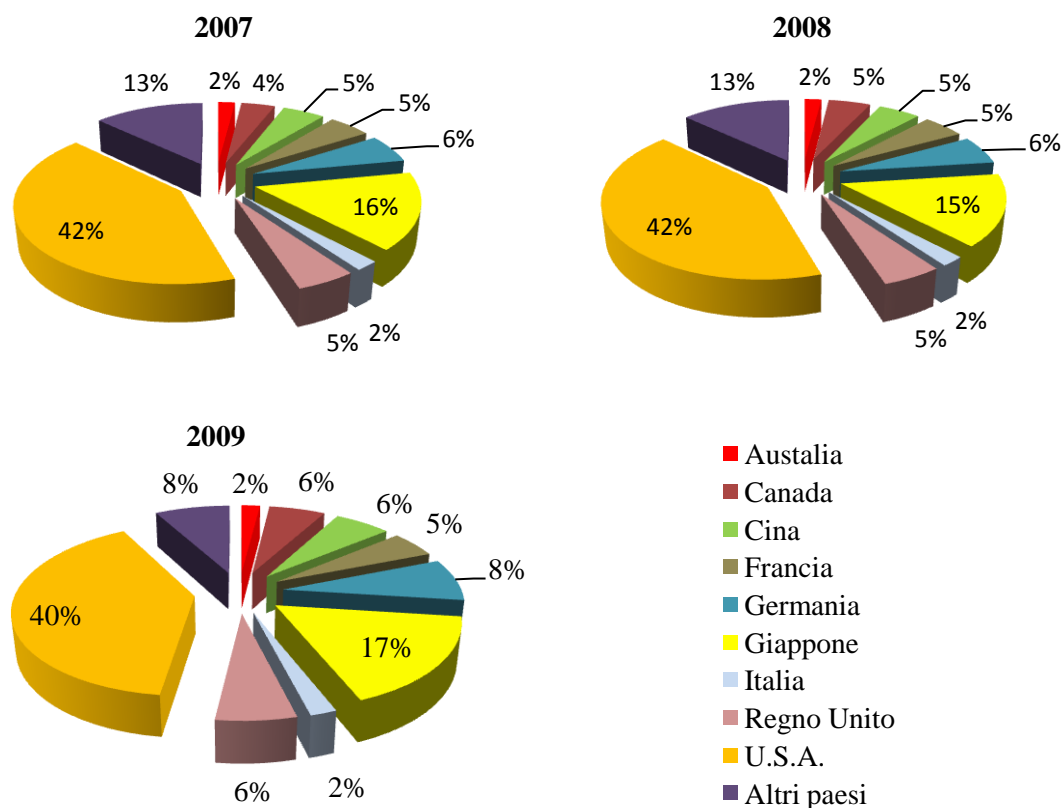
Tabella 1: Dati di vendita del mercato italiano degli strumenti musicali. Anni 2006-2009.

	2006		2007		2008		2009	
	Pezzi venduti	Valore in Euro	Pezzi venduti	Valore in Euro	Pezzi venduti	Valore in Euro	Pezzi venduti	Valore in Euro
<b>Strumenti in senso stretto</b>	504.185	190.149.100	541.181	211.998.500	529.024	210.061.547	526.891	198.588.777
<b>Apparati</b>	1.004.265	166.925.200	1.053.065	172.843.800	1.081.933	188.751.468	1.050.080	206.158.157
<b>Di cui: Amplificatori per strumenti</b>	74.280	21.705.700	97.405	29.006.400	106.290	28.970.936	119.801	33.933.416
<b>Totale</b>	1.508.450	357.074.300	1.594.246	384.842.300	1.610.957	398.813.015	1.576.971	404.746.934

Fonte: Elaborazione su dati Centro ASK, 2007; IULM, 2008, 2009; Dismamusica, 2009.

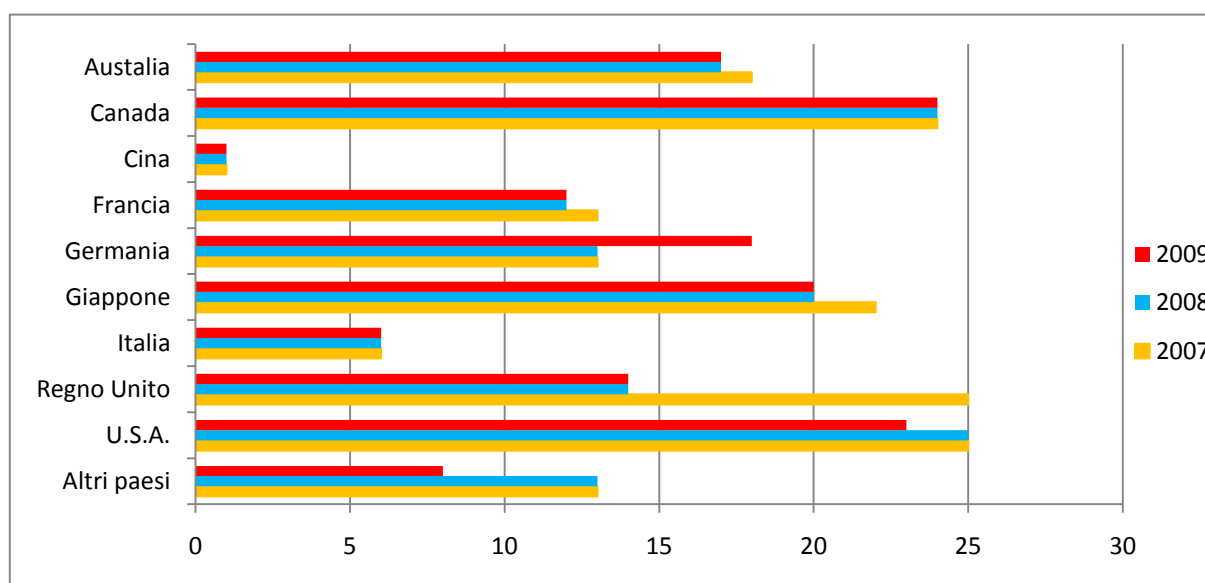
Spostando il focus dell'analisi al livello mondiale, nel 2009 il mercato degli strumenti musicali ha registrato un valore di circa 15 miliardi di Dollari, con una flessione rispetto al 2008 pari al 15%, imputabile alla riduzione delle vendite di tutte le categorie di prodotti negli Stati Uniti [IULM, 2010]. Infatti, considerando le quote di mercato nelle vendite di strumenti musicali (Grafico 1), si evince il primato del mercato statunitense, seguito da quelli giapponese e tedesco, mentre è possibile evidenziare la debolezza dell'Italia, che rappresenta solo il 2% delle vendite mondiali. Tale valutazione è confermata dall'analisi del Grafico 2, che mette a confronto la spesa pro-capite annua per strumenti musicali relativa ai nove principali mercati nazionali.

Grafico 1: Quote di mercato nelle vendite di strumenti musicali.



Fonte: Elaborazione su dati IULM, 2008, 2009, 2010.

Grafico 2: Spesa pro-capite annua per strumenti musicali, 2007-2008-2009. Valori espressi in USD.



Fonte: Elaborazione su dati IULM, 2008, 2009, 2010.

L'industria italiana degli strumenti musicali appare dunque debole in un confronto a livello mondiale, e questa valutazione trova conferma se si considera che, sul totale delle esportazioni mondiali (5.863 migliaia di Dollari nel 2007), la quota dell'Italia è pari al 3,2% (dato relativo al 2007). In particolare, le esportazioni italiane di strumenti musicali hanno registrato una flessione nel periodo compreso tra il 2004 e il 2007, anche a fronte del rafforzamento delle esportazioni cinesi – passate dal 14,5% nel 2003 al 20,9% nel 2007 sul totale delle esportazioni mondiali [dati ICE, <http://appsrv.ice.gov.it/spol/prodotto.asp>]. Tale crescita delle esportazioni cinesi è in parte imputabile al fatto che numerosi produttori di strumenti musicali – in particolare marchi storici e di fama mondiale nella produzione di chitarre, bassi e relativi sistemi di amplificazione, quali ad esempio Fender e Marshall – hanno quasi totalmente delocalizzato la propria produzione in Cina, potendo quindi offrire intere linee di prodotto a prezzi inferiori, a differenza di più giovani produttori – un esempio è offerto dall'italiana Parsek S.r.l. – che hanno deciso di mantenere la propria produzione in Italia al fine di rispondere a soggetti di domanda particolarmente attenti alla qualità dei prodotti.

## 1.2 L'impresa: Parsek S.r.l.

Il prodotto oggetto dello studio statistico svolto è realizzato da Parsek S.r.l., impresa nata nel 1996 nel campo della fabbricazione degli strumenti musicali, in particolare in quello della progettazione di sistemi per basso e per chitarra. La sede legale e gli stabilimenti produttivi si trovano a San Giovanni Teatino in provincia di Chieti. Parsek S.r.l. ha un capitale sociale di 100.000 Euro ed è amministrata dal fondatore, nonché socio unico, Marco De Virgiliis. Il fatturato annuo a bilancio il 31/12/2009 era di 6.296.225 Euro (in calo rispetto ai 6.473.707 Euro del 2008) con un'utile netto di 63.354 Euro [Infocamere, 2010].

Il primo *brand* con cui Parsek si è presentata sul mercato musicale è Markbass, un marchio che identifica prodotti specifici per il basso; nel tempo l'azienda ha però potuto aumentare la propria presenza sul mercato aggiungendo marchi quali Markaudio, Markacoustic e DVMark, l'insieme dei quali identifica ad oggi l'intero portafoglio prodotti dell'azienda.

Il carattere fortemente innovativo dei suoi prodotti – frutto non solo della collaborazione attiva di musicisti riconosciuti a livello internazionale, ma anche di fonici professionisti – ha permesso a Parsek di sviluppare un'offerta riconosciuta dal mercato qualitativamente valida e collocata nella fascia alta del mercato.

Gli attributi qualitativi ed innovativi della produzione di Parsek collocano l'offerta verso consumatori attenti ed esigenti per quanto riguarda le caratteristiche del *sound*: l'attenta offerta ad essi rivolta deriva dal forte collegamento comunicativo esistente tra l'impresa produttrice e i numerosi musicisti professionisti, che hanno reso possibile uno sviluppo dinamico dei prodotti sempre più rispondenti alle esigenze di tale clientela qualificata.

### 1.3 Il prodotto: amplificatore per basso Mini CMD 121P

Tra i numerosi prodotti del marchio Markbass, è stato scelto ai fini dell'analisi statistica della serie storica dei dati di vendita il Mini CMD 121P, un amplificatore di tipo combo per basso.

La peculiarità di un amplificatore di questo tipo, è quella di avere in un'unica struttura il finale di potenza – detto anche testata – il preamplificatore e l'altoparlante. Il mini CMD 121 P risulta essere molto compatto e di dimensioni contenute.

Figura 1: Amplificatore Mini CMD 121P.



Tabella 2: Principali caratteristiche tecniche.

<b>Cono</b>	1 da 12 pollici
<b>Potenza</b>	300 Watt
<b>Tweeter</b>	Piezoelettrico
<b>Altezza</b>	42,3 cm
<b>Larghezza</b>	38,3 cm
<b>Profondità</b>	35,8 cm
<b>Peso</b>	13,3 kg
<b>Testata</b>	Combo Head

Fonte (Figura 1, Tabella 2): [www.markbass.it](http://www.markbass.it)

La testata integrata Combo Head (riadattata dalla Little Mark II) è dotata oltre al gain, master volume ed equalizzatore a quattro vie, di due filtri VLE (Vintage Loudspeaker Emulator) e VPF (Variable Preshape Filter) sviluppati da Markbass in linea con la sua filosofia di lavoro; il primo emula un suono *vintage*, mentre il secondo, agendo sul taglio dei toni medi e sull'esaltazione di alti e bassi, riesce a rendere al meglio il suono *slap*.

## CAPITOLO 2

### ANALISI STATISTICA DEL CICLO DI VITA DEL PRODOTTO

L'analisi statistica svolta ha per oggetto la serie storica delle vendite mensili dell'amplificatore per basso Mini CMD 121P, dal momento del suo lancio sul mercato, avvenuto nel Maggio 2005, fino all'ultima osservazione disponibile al momento della richiesta dei dati, Settembre 2010. L'analisi ha pertanto ad oggetto 65 osservazioni mensili di vendita del prodotto sul mercato italiano (Tabella 3).

Tabella 3: Dati mensili di vendita dell'amplificatore Mini CMD 121P.

<b>MESE</b>	<b>2005</b>	<b>2006</b>	<b>2007</b>	<b>2008</b>	<b>2009</b>	<b>2010</b>
<b>Gennaio</b>		73	116	244	267	152
<b>Febbraio</b>		52	123	261	201	198
<b>Marzo</b>		61	226	149	139	182
<b>Aprile</b>		91	139	205	129	214
<b>Maggio</b>	18	118	259	212	182	223
<b>Giugno</b>	71	105	263	174	212	221
<b>Luglio</b>	70	92	163	211	146	239
<b>Agosto</b>	44	56	129	110	154	151
<b>Settembre</b>	65	105	163	178	263	261
<b>Ottobre</b>	92	138	215	240	171	
<b>Novembre</b>	53	167	164	291	265	
<b>Dicembre</b>	68	130	144	245	170	
<b>Totali per anno</b>	481	1.188	2.104	2.520	2.299	1.841
<b>Totale 2005-2010</b>						10.433

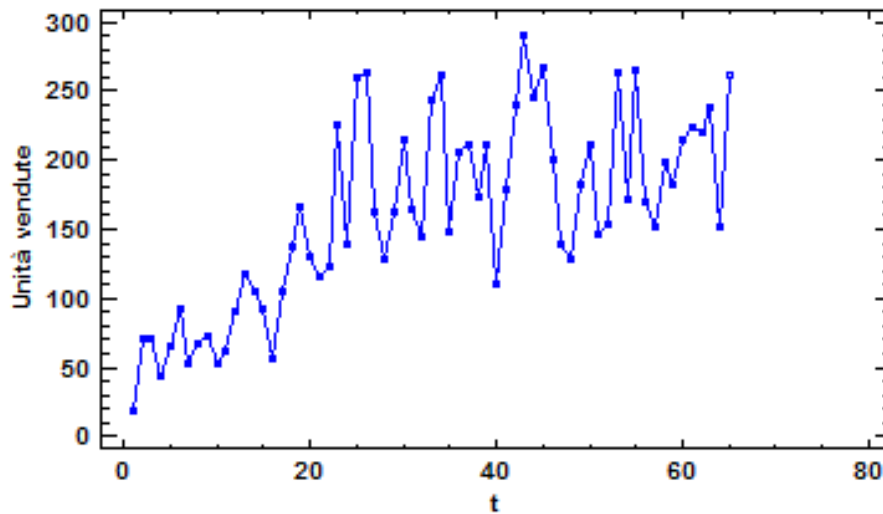
Con l'ausilio del software di elaborazione statistica Statgraphics Centurion XVI sono state effettuate una serie di elaborazioni, analisi e valutazioni riguardanti il ciclo di vita del prodotto in questione.

I modelli utilizzati per l'analisi della serie storica sono i seguenti:

- il modello di Norton e Bass (N&B);
- il modello standard di Bass (BM);
- il modello di Bass generalizzato (GBM);
- il modello Guseo-Guidolin (GuGu).

Al fine di effettuare l'analisi della serie storica, i dati di vendita sono stati inizialmente ordinati in sequenza temporale, e successivamente rappresentati in un grafico cartesiano. La prima rappresentazione ha avuto ad oggetto i dati di vendita mensili (Grafico 3).

Grafico 3: Andamento delle vendite mensili.



Dall'analisi del Grafico 3 si evidenzia un iniziale andamento crescente delle vendite che tende a stabilizzarsi a partire dall'inizio del 2007, a circa due anni dal lancio del prodotto sul mercato.

## 2.1 Analisi dei dati istantanei: il modello di Norton e Bass (N&B)

Alla luce dell'analisi grafica preliminare, si è proceduto all'applicazione del modello di Norton e Bass [Norton, Bass, 1987], che nasce per rispondere alla necessità di dare una rappresentazione ed una previsione del ciclo di vita di un prodotto caratterizzato da una vita lunga e stazionaria dopo una transizione. Tale modello è stato applicato soprattutto nella valutazione di prodotti, come ad esempio i farmaci, che dopo un iniziale periodo di crescita susseguente al lancio sul mercato si stabilizzano ad una determinata quota che in media rimane stabile per un periodo di tempo molto lungo.

Algebricamente, tale modello è rappresentato dalla formula del modello standard di Bass, ma diversamente da quest'ultimo, i dati di input sono costituiti dalle osservazioni istantanee. Quindi tale modello consente di descrivere l'evoluzione delle vendite medie istantanee, ed è definito come segue:

$$F(t_i) = \frac{1 - e^{-(p_i+q_i)t_i}}{1 + \frac{q_i}{p_i} e^{-(p_i+q_i)t_i}}$$

### La regressione non lineare: il modello di Norton e Bass

Variabile dipendente: Mbd (Dati mensili di vendita)

Variabili indipendenti: t

Funzione da stimare:  $m \cdot (1 - \text{EXP}(-(p+q) \cdot t)) / (1 + (q/p) \cdot \text{EXP}(-(p+q) \cdot t))$

Stime dei parametri iniziali:

m = 300,0  
 p = 0,01  
 q = 0,1

Metodo di stima: Marquardt

Stima raggiunta per la convergenza della somma residua dei quadrati.

Numero di iterazioni: 5

Numero di chiamate di funzione: 22

### Risultati della stima

			Intervallo di confidenza al 95,0%	
		Errore standard	Asintotico	
Parametro	Stima	Asintotico	Inferiore	superiore
m	205,639	10,7288	184,193	227,086
p	0,03488	0,0155002	0,00389558	0,0658645
q	0,0742917	0,061051	0,0477477	0,196331

### Analisi della varianza

Sorgente	Somma dei quadrati	G.l.	Media dei quadrati
Modello	1,85798E6	3	619326,
Residuo	118496,	62	1911,23
Totale	1,97648E6	65	
Totale (Corr.)	301898,	64	

R-quadrato = 60,7496 percento

R-quadrato (adattato per g.l.) = 59,4835 percento

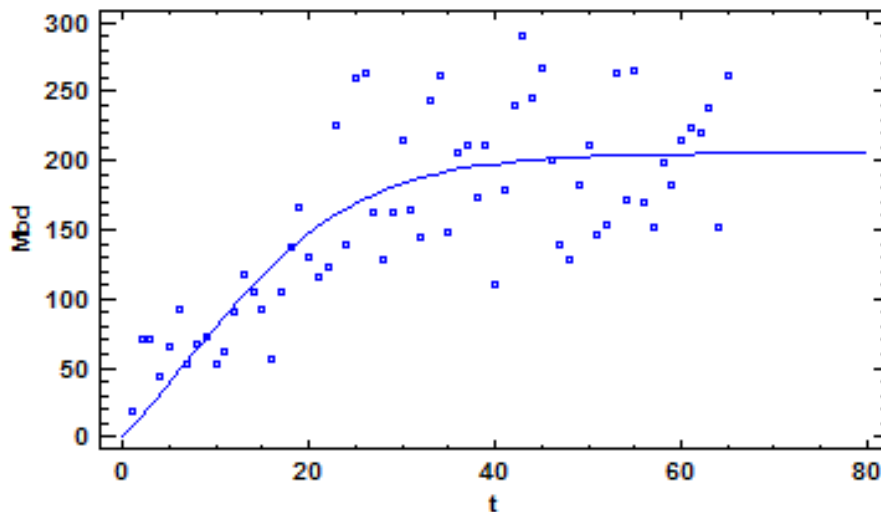
Errore standard della stima = 43,7176

Errore assoluto medio = 35,0614

Statistica di Durbin-Watson = 1,66337

Autocorrelazione residua al lag 1 = 0,154649

Grafico 4: Grafico del modello di Norton e Bass.

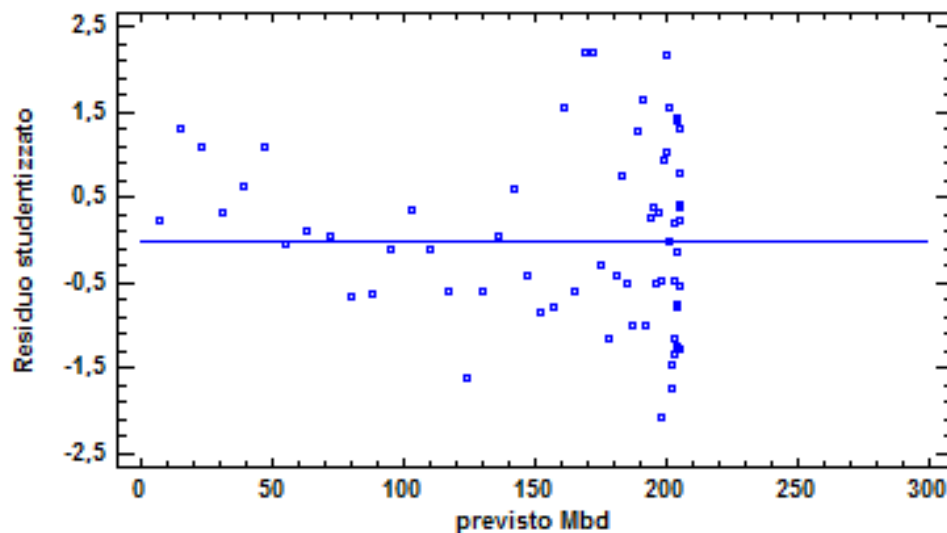


L'adattamento del modello può essere considerato sufficientemente valido ( $R^2 = 0,607496$ ) tenendo conto della natura dei dati studiati. Gli intervalli di confidenza delle stime dei parametri risultano relativamente stretti, e in particolare la stima di  $m$  – vendite medie – risulta pari a circa 206 unità.

Il test di Durbin-Watson, pari a 1,66337, indica che non vi è presenza di autocorrelazione fra i residui; ciò nonostante, si è voluto approfondire l'analisi tramite l'applicazione di un processo ARMA, al fine di poter effettuare una previsione.

I modelli della famiglia ARMA [Pankratz, 1991; Piccolo, 1990] consentono di effettuare una previsione del valore futuro dei dati partendo da una serie storica. Il modello consta di due componenti: quella autoregressiva (AR, di ordine  $p$ ) e quella di media mobile (MA, di ordine  $q$ ).

Grafico 5: Grafico dei residui – modello di Norton e Bass.



### Previsione con processo SARMAX (1,0,1)x(1,0,1)

Variabile: Mbd (Dati mensili di vendita)

Numero di osservazioni = 65

Indici temporali: t

Lunghezza della stagionalità = 12

### **Sintesi della previsione**

Modello di previsione selezionato: ARIMA(1,0,1)x(1,0,1)12 con costante + 1 regressore

Numero di previsioni generate: 12

Numero di periodi trattenuti per convalida: 0

	<i>Stima</i>	<i>Convalida</i>
<i>Statistica</i>	<i>Periodo</i>	<i>Periodo</i>
RMSE	37,028	
MAE	29,3516	
MAPE	20,8485	
ME	1,11254	
MPE	-3,59955	

### Sintesi del modello ARIMA

<i>Parametro</i>	<i>Stima</i>	<i>Errore std.</i>	<i>t</i>	<i>P-value</i>
AR(1)	-0,540187	0,221828	-2,43517	<b>0,017927</b>
MA(1)	-0,817818	0,155288	-5,26646	0,000002
SAR(1)	1,41779	0,0585158	24,2292	0,000000
SMA(1)	1,38506	0,086067	16,0929	0,000000
PREN&B	0,926632	0,11127	8,32779	0,000000
Media	12,7157	15,2368	0,834542	0,407342
Costante	-8,18226			

Previsione storica: sì

Varianza stimata di rumore bianco = 1407,25 con 59 gradi di libertà

Deviazione standard stimata di rumore bianco = 37,5134

Numero di iterazioni: 13

Grafico 6: Grafico delle sequenze temporali.

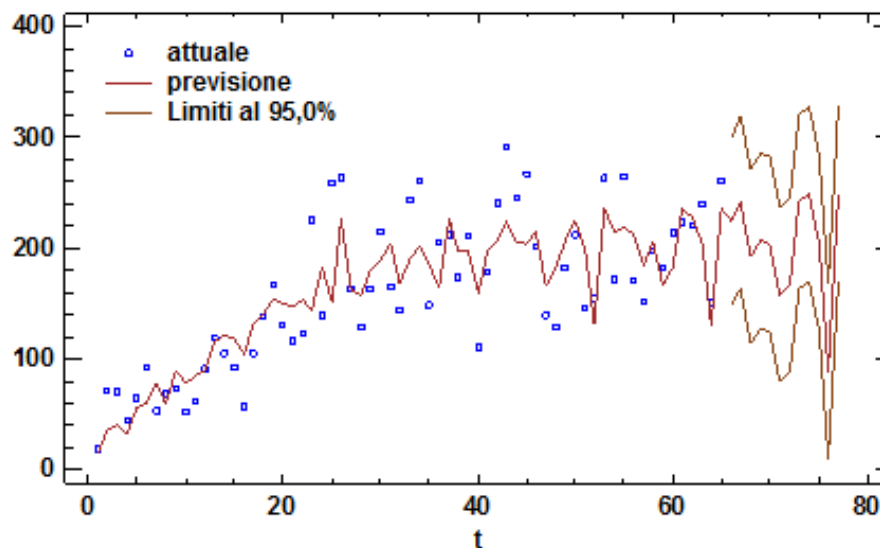
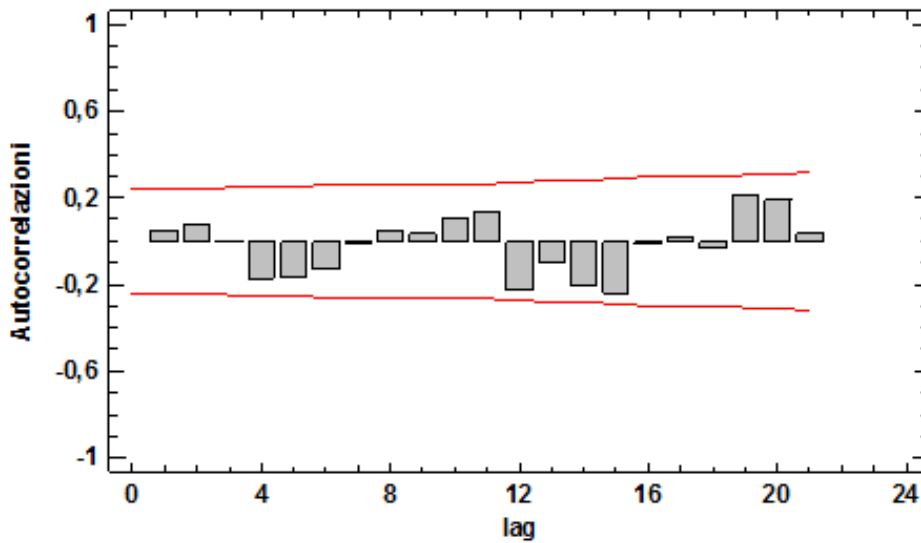
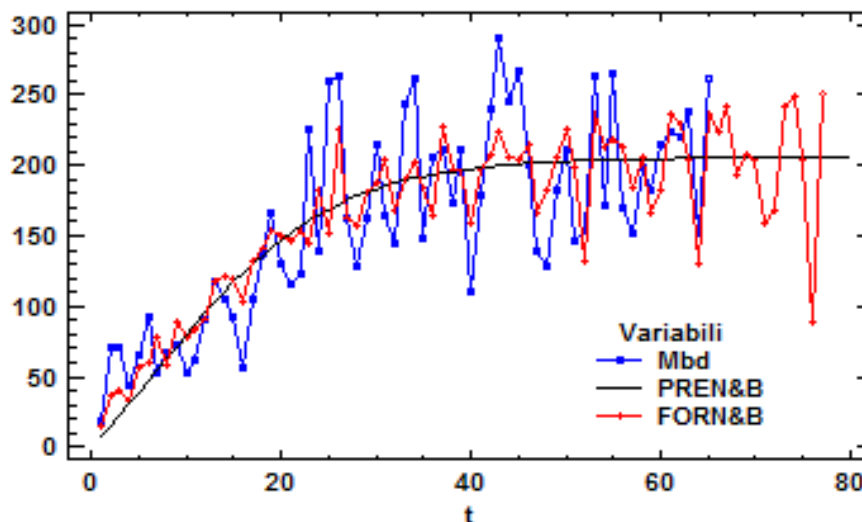


Grafico 7: Grafico del test sui residui.



L'applicazione di un processo SARMAX (1,0,1)x(1,0,1) con costante e regressore, ha comunque dato risultati soddisfacenti: la devianza residua è stata ridotta da 118.496 a 83.027,75. Inoltre, i valori delle statistiche  $t$  e dei  $P$ -values risultano significativi, e il regressore utilizzato – cioè le previsioni ottenute dall'applicazione del modello di Norton e Bass – ha un valore prossimo all'unità.

Grafico 8: Grafico di confronto: osservazioni istantanee, previsioni del modello di Norton e Bass, previsioni del processo SARMAX (1,0,1)x(1,0,1) con costante e regressore.



Il Grafico 8 mette a confronto i dati istantanei di vendita con le previsioni del modello di Norton e Bass, e con le stesse affinate dal processo SARMAX (1,0,1)x(1,0,1) con costante e regressore. Dall'analisi visiva si denota un evidente scostamento – soprattutto nella parte

iniziale – fra le previsioni affinate e i dati istantanei, ma l'ipotesi di una continuazione del ciclo di vita del prodotto appare confermata tenendo conto delle caratteristiche del mercato nel quale il prodotto si colloca<sup>2</sup>, sebbene appaia del tutto irrealistica l'ipotesi che le vendite medie del prodotto si mantengano stabili pressoché indefinitamente.

### 2.1.1 Considerazioni sull'analisi dei dati istantanei

L'analisi dei dati istantanei realizzata tramite l'impiego del modello di Norton e Bass ha evidenziato discreti risultati in termini di adattamento, mentre poco significativi sono apparsi gli esiti in fase previsionale nel medio-lungo termine.

Visto l'andamento del grafico delle osservazioni istantanee (Grafico 3), si è provato ad intervenire perturbando il modello di Norton e Bass attraverso l'inserimento di una funzione  $G_{(t2)}$  rappresentante uno shock di tipo esponenziale:

$$\tilde{S}_{1,t} = m_1 \cdot F_{(t1)} \cdot G_{(t2)}$$

con

$$G_{(t2)} = 1 + c_1 e^{b_1(t-a_1)} I_{t \geq a_1}$$

Per la natura delle osservazioni istantanee – denotate da notevole varianza e cambiamenti di “ritmo” – il modello non è riuscito a centrare con esattezza il punto di insorgenza dello shock; pertanto, si è deciso di non procedere oltre su questa strada, ma di focalizzare l'analisi sulle vendite mensili cumulate.

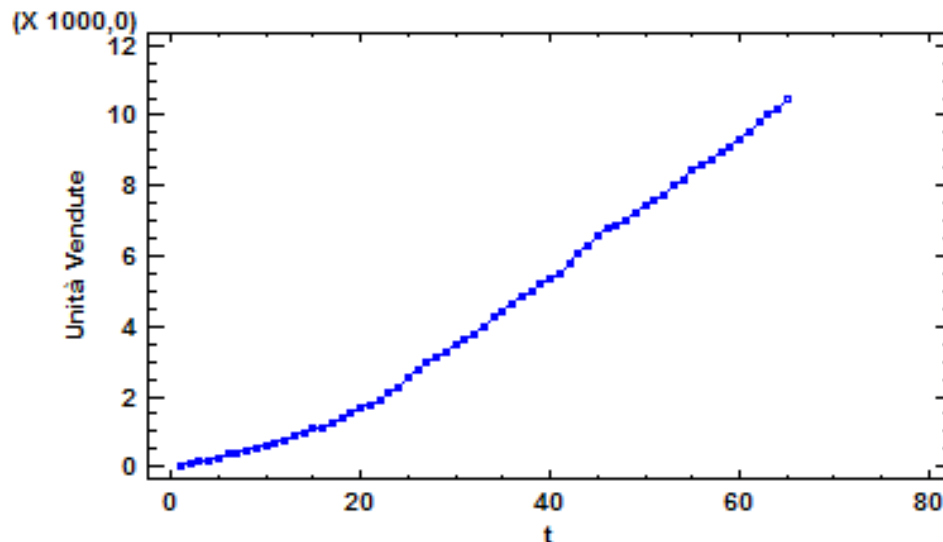
---

<sup>2</sup> Il mercato degli strumenti musicali si caratterizza per una presenza continuativa e a lungo termine dei prodotti in esso venduti; basti pensare a modelli progettati negli anni Cinquanta e ancora oggi in produzione.

## 2.2 Analisi dei dati cumulati

Ai fini dell'analisi dei dati cumulati si è proceduto, come in precedenza per l'analisi delle osservazioni istantanee, a realizzare in primo luogo una rappresentazione grafica della serie (Grafico 9).

Grafico 9: Andamento delle vendite mensili cumulate.



### 2.2.1 Il modello standard di Bass

Il primo modello applicato è quello standard di Bass (Bass, 1969); tale modello permette, attraverso le sue previsioni, di poter prendere decisioni riguardo a vari aspetti della vita di un'impresa: dall'impostazione delle politiche di marketing alla modulazione dell'offerta da parte dell'impresa, fino alla riorganizzazione del portafoglio prodotti tenendo conto della fase del ciclo di vita in cui essi si trovano. Il modello standard di Bass è stato sviluppato al fine di fornire una previsione del ciclo di vita di un prodotto in funzione di un numero limitato di parametri:

$$z' = m \left( p + q \frac{z}{m} \right) \left( 1 - \frac{z}{m} \right) = \left( p + q \frac{z}{m} \right) (m - z)$$

ove  $z'$  rappresenta le vendite istantanee,  $m$  rappresenta il mercato potenziale,  $p$  e  $q$  rappresentano le quote asintotiche rispettivamente di innovatori ed imitatori,  $z$  rappresenta gli agenti che hanno già adottato ed  $(m - z)$  rappresenta il mercato residuo.

#### La regressione non lineare: il modello standard di Bass

Variabile dipendente: MbdC (Dati cumulati di vendita)

Variabili indipendenti: t

Funzione da stimare:  $m \cdot (1 - \text{EXP}(-(p+q) \cdot t)) / (1 + (q/p) \cdot \text{EXP}(-(p+q) \cdot t))$

Stime dei parametri iniziali:

$$m = 13000,0$$

$$p = 0,01$$

$$q = 0,1$$

Metodo di stima: Marquardt

Stima raggiunta per la convergenza della somma residua dei quadrati.

Numero di iterazioni: 7

Numero di chiamate di funzione: 33

### Risultati della stima

Parametro	Stima	Errore standard asintotico	Intervallo di confidenza al 95,0%	
			inferiore	Superiore
m	13085,4	242,384	12600,9	13569,9
p	0,00396257	0,0000696467	0,00382335	0,0041018
q	0,0577808	0,00156061	0,0546612	0,0609005

### Analisi della varianza

Sorgente	Somma dei quadrati	G.l.	Media dei quadrati
Modello	1,94476E9	3	6,48255E8
Residuo	651132,	62	10502,1
Totale	1,94542E9	65	
Totale (Corr.)	6,88009E8	64	

R-quadrato = 99,9054 percento

R-quadrato (adattato per g.l.) = 99,9023 percento

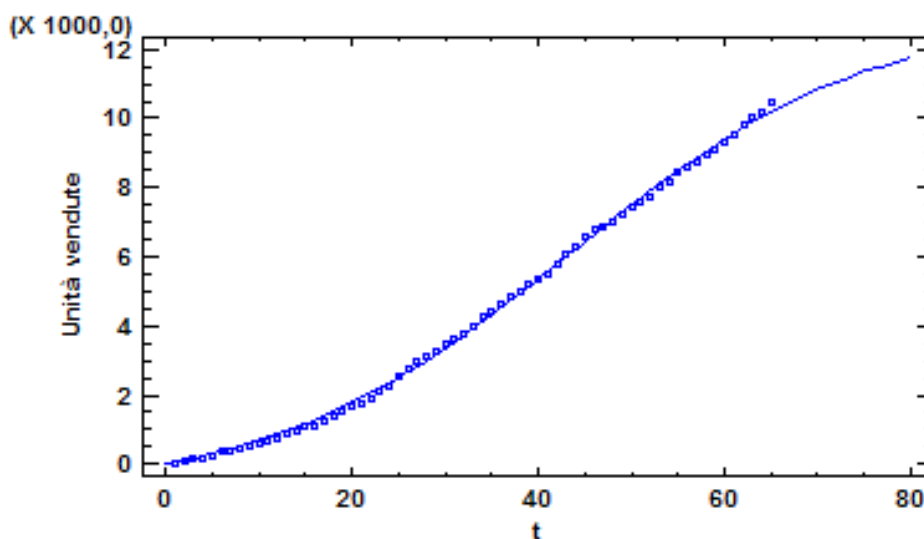
Errore standard della stima = 102,48

Errore assoluto medio = 87,6798

Statistica di Durbin-Watson = 0,208698

Autocorrelazione residua al lag 1 = 0,841169

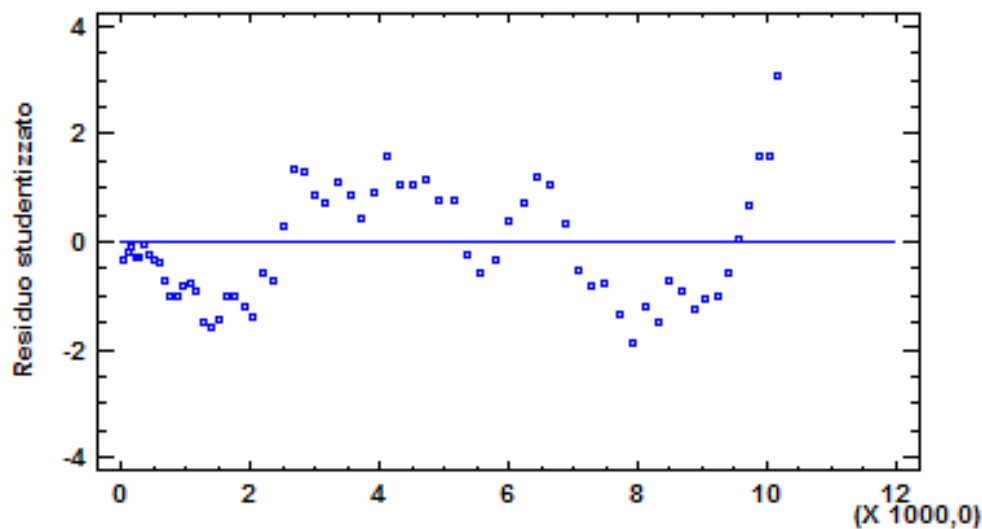
Grafico 10: Grafico del modello standard di Bass.



L'adattamento del modello alla serie di vendite cumulate è relativamente buono, avendo un  $R^2$  pari a 0,999054. Il modello appare robusto, in quanto i parametri stimati hanno intervalli di confidenza abbastanza stretti: in particolare, il mercato potenziale ( $m$ ) è stimato pari a circa 13.085 unità vendibili, e i valori di  $p$  e  $q$  sono rispettivamente pari a 0,00396256 e 0,0577808. Il rapporto  $q/p$  è pari a 14,58, stante ad indicare che la quota asintotica degli innovatori risulta essere pari a circa il 20%, dato che indica il ruolo rilevante svolto dagli innovatori nell'adozione del prodotto.

Il valore del test di Durbin-Watson, pari a 0,208698, indica la presenza di autocorrelazione fra i residui; tale ipotesi risulta avvalorata dall'analisi grafica degli stessi (Grafico 11).

Grafico 11: Grafico dei residui – modello standard di Bass.



Essendo esclusa la possibilità che i residui si distribuiscano come una variabile *white noise*<sup>3</sup>, si è deciso di procedere all'applicazione di un modello della famiglia ARMA; nello specifico, un SARMAX (2,0,0)x(1,0,1) con costante.

### **Previsione con processo SARMAX (2,0,0)x(1,0,1) con costante**

Variabile: MbdC-PREBass

Numero di osservazioni = 65

Indici temporali: t

Lunghezza della stagionalità = 12

### **Sintesi della previsione**

Modello di previsione selezionato: ARIMA(2,0,0)x(1,0,1)12 con costante

<sup>3</sup> Per *white noise* si intende una distribuzione con media nulla [ $M(\varepsilon_t) = 0$ ], omoschedasticità [ $\sigma_{\varepsilon_t}^2 = \sigma^2$ ], ed incorrelazione [ $\sigma_{\varepsilon_t \varepsilon_{t'}} = 0$ , con  $t \neq t'$ ].

Numero di previsioni generate: 12  
 Numero di periodi trattenuti per convalida: 0

	<i>Stima</i>	<i>Convalida</i>
<i>Statistica</i>	<i>Periodo</i>	<i>Periodo</i>
RMSE	41,281	
MAE	31,6047	
MAPE		
ME	2,00143	
MPE		

### Sintesi del modello ARIMA

<i>Parametro</i>	<i>Stima</i>	<i>Errore std.</i>	<i>t</i>	<i>P-value</i>
AR(1)	1,29689	0,12425	10,4377	0,000000
AR(2)	-0,370598	0,126344	-2,93324	0,004745
SAR(1)	1,41194	0,0480909	29,3598	0,000000
SMA(1)	1,37901	0,0722404	19,0892	0,000000
Media	45,4616	40,3852	1,1257	0,264776
Costante	-1,38038			

Previsione storica: sì

Varianza stimata di rumore bianco = 1745,54 con 60 gradi di libertà

Deviazione standard stimata di rumore bianco = 41,7796

Numero di iterazioni: 9

In seguito all'applicazione del modello SARMAX di analisi dei residui, è stato ottenuto un notevole guadagno in termini di riduzione della devianza, diminuita da circa 651.132 a circa 104.732. Il modello appare decisamente centrato, sia in riferimento al grafico relativo al test sui residui ai vari *lags*, sia in riferimento alla significatività delle componenti del modello evidenziate dalle statistiche *t* e dai *p-values*, tutte accettabili.

Grafico 12: Grafico delle sequenze temporali.

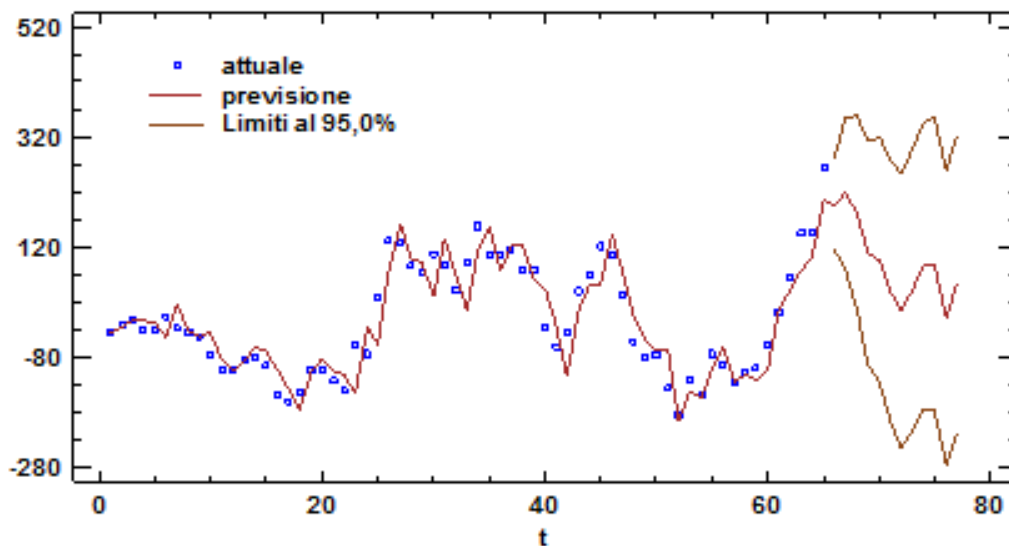
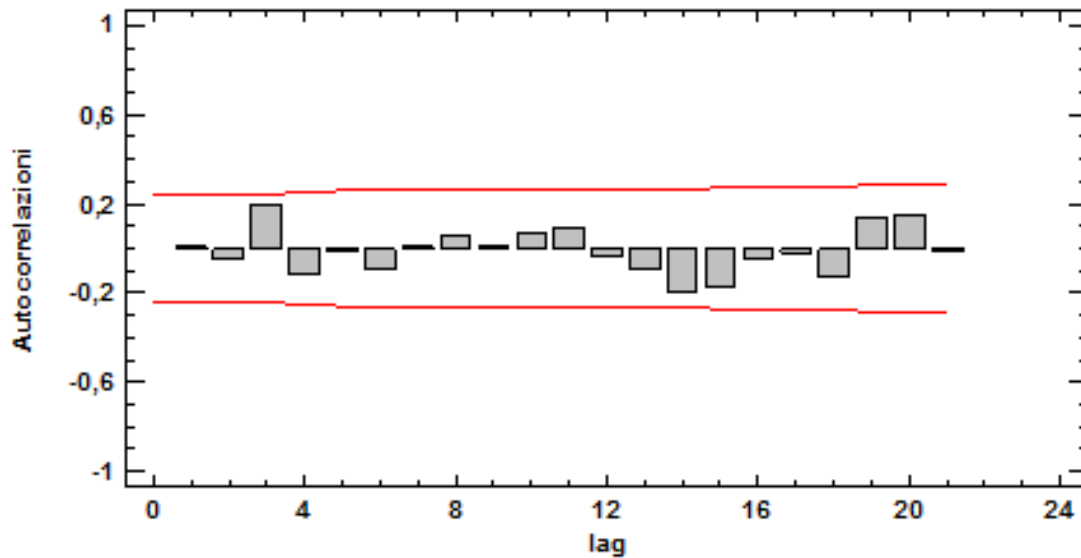
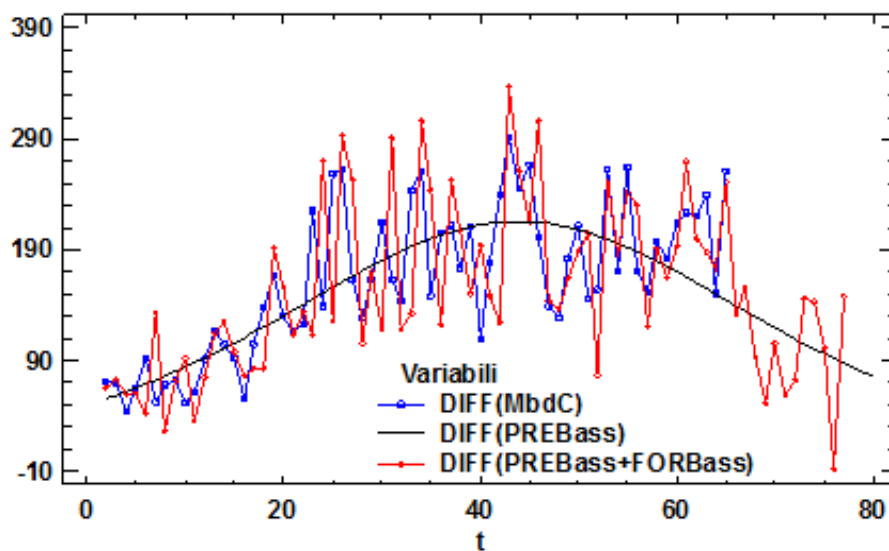


Grafico 13: Grafico del test sui residui.



I risultati fin qui ottenuti possono essere valutati ed analizzati procedendo ad una rappresentazione grafica, su scala istantanea, che metta a confronto la serie storica oggetto dello studio, i valori previsti dal modello standard di Bass e le previsioni risultanti dall'applicazione del modello SARMAX  $(2,0,0) \times (1,0,1)$  con costante.

Grafico 14: Grafico di confronto sulle differenziazioni di: dati cumulati, previsioni del modello standard di Bass, previsioni del processo SARMAX  $(2,0,0) \times (1,0,1)$  con costante.



Il grafico evidenzia una discreta capacità previsionale del modello di Bass con l'affinamento dato dal modello SARMAX, ma appare decisamente forzata la previsione di una chiusura del ciclo di vita del prodotto intorno alla centesima osservazione.

L'applicazione del modello di Bass ha dato discreti risultati in termini di adattamento; tuttavia da una valutazione attenta del Grafico 10, si intravedono degli spazi di manovra in termini di introduzione di apposite perturbazioni per migliorare l'adattamento e la capacità di previsione del modello. Nello specifico si è proceduto all'applicazione del modello di Bass generalizzato, in un primo tempo arricchito da un solo shock esponenziale, e successivamente da un ulteriore shock di tipo rettangolare.

### 2.2.2 Il modello di Bass generalizzato (GBM)

La generalizzazione del modello di Bass [Bass, Krishnan, Jain, 1994; Guseo, 2004a, 2004b] permette di manipolare la serie con l'introduzione di una funzione di trasferimento  $x(t)$ , in grado di rallentare o accelerare il processo di diffusione. Tale funzione arricchisce il modello standard di Bass consentendo di valutare sia eventuali decisioni manageriali sul prezzo e/o sulla pubblicità, sia eventi esterni che potrebbero alterare la densità della distribuzione, conservandone però l'integrale.

La generalizzazione del modello di Bass è algebricamente definita come segue:

$$z' = m \left( p + q \frac{z}{m} \right) \left( 1 - \frac{z}{m} \right) x(t)$$

ove  $x(t)$  rappresenta una qualsivoglia funzione integrabile in domini limitati e non negativa.

#### 2.2.2.1 Il GBM con uno shock esponenziale

Di seguito è presentata l'applicazione del GBM con uno shock esponenziale nel quale la funzione portante  $x(t)$  altera la funzione con uno shock istantaneo intenso seguito da un effetto di assorbimento che riporta la distribuzione alla stazionarietà.

#### La regressione non lineare: il GBM con uno shock esponenziale

Variabile dipendente: MbdC (Dati cumulati di vendita)

Variabili indipendenti: t

Funzione da stimare:  $m \cdot (1 - \text{EXP}(-(p+q) \cdot (t + (c1/b1) \cdot (\text{EXP}(b1 \cdot (t-a1)) - 1) \cdot (a1 \leq t)))) / (1 + (q/p) \cdot \text{EXP}(-(p+q) \cdot (t + (c1/b1) \cdot (\text{EXP}(b1 \cdot (t-a1)) - 1) \cdot (a1 \leq t))))$

Stime dei parametri iniziali:

m = 13000,0

p = 0,00396256

q = 0,0577808

c1 = 1,34

b1 = -0,67

a1 = 21,0

Metodo di stima: Marquardt

Stima raggiunta per la convergenza della somma residua dei quadrati.

Numero di iterazioni: 56

Numero di chiamate di funzione: 448

## Risultati della stima

			Intervallo di confidenza al 95,0%	
		Errore standard	asintotico	
Parametro	Stima	asintotico	inferiore	Superiore
m	18044,2	2121,92	13798,2	22290,1
p	0,00305535	0,000226115	0,0026029	0,00350781
q	0,0361172	0,00637787	0,023355	0,0488793
c1	0,816805	0,0869032	0,642912	0,990698
b1	-0,0886037	0,0369709	-0,162582	-0,0146249
a1	19,0986	0,716191	17,6655	20,5317

## Analisi della varianza

Sorgente	Somma dei quadrati	G.l.	Media dei quadrati
Modello	1,94523E9	6	3,24205E8
Residuo	182878,	59	3099,63
Totale	1,94542E9	65	
Totale (Corr.)	6,88009E8	64	

R-quadrato = 99,9734 percento

R-quadrato (adattato per g.l.) = 99,9712 percento

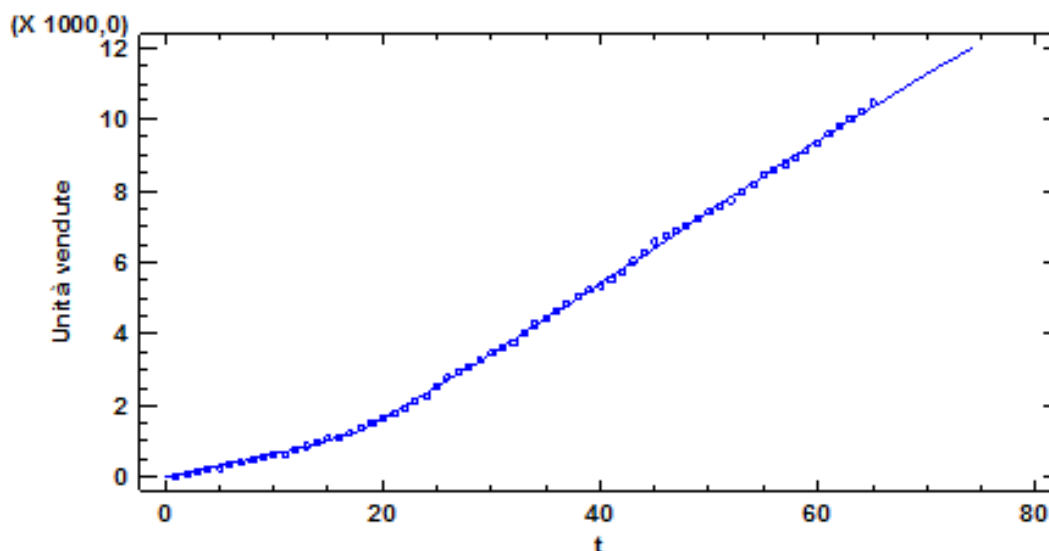
Errore standard della stima = 55,6744

Errore assoluto medio = 40,4998

Statistica di Durbin-Watson = 0,648818

Autocorrelazione residua al lag 1 = 0,646342

Grafico 15: Grafico del GBM con uno shock esponenziale.

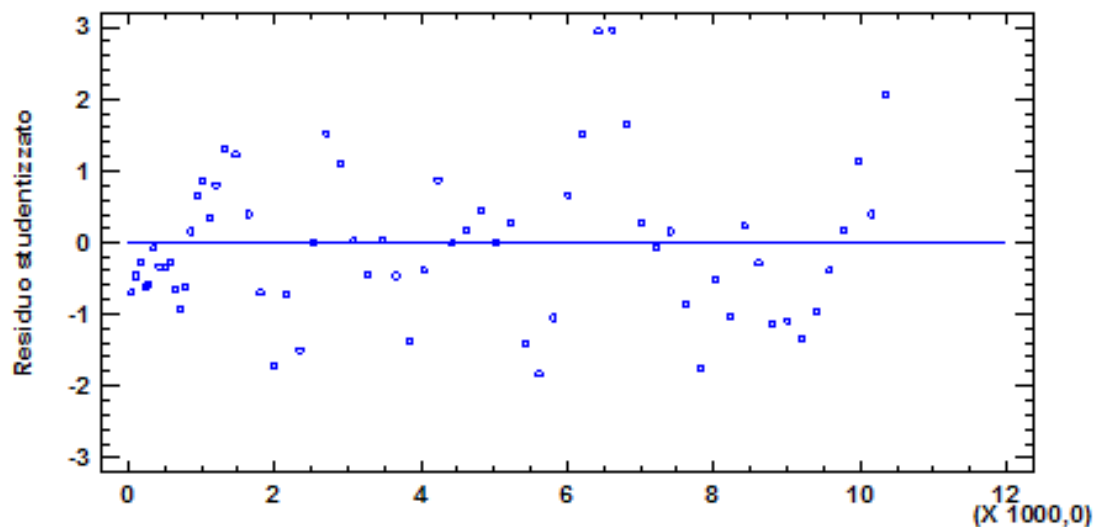


L'introduzione di uno shock esponenziale migliora notevolmente l'adattamento del modello, con un  $R^2$  pari a 0,99734 e con un miglioramento rispetto al Bass standard.

I parametri dello shock esponenziale ( $a1, b1, c1$ ) risultano abbastanza centrati se si guarda l'intervallo di confidenza: nello specifico la componente di smemorizzazione ( $b1$ ) è compresa in un intervallo negativo avvalorando l'ipotesi di una smemorizzazione completa di tale shock, e la componente relativa all'ampiezza dello shock ( $c1$ ) è positiva, stando quindi ad

indicare uno shock esponenziale positivo. Tale shock si verifica circa nel punto  $a_1$  pari a 19, individuabile quindi nel mese di Novembre 2006.

Grafico 16: Grafico dei residui – modello di Bass generalizzato con uno shock esponenziale.



Anche in questo caso lo studio del test di Durbin-Watson e l'analisi grafica dei residui hanno suggerito l'applicazione di un modello ARMA.

### **Previsione con processo ARMAX (2,0,2)**

Variabile: MbdC-PREBass1e

Numero di osservazioni = 65

Indici temporali: t

Lunghezza della stagionalità = 12

### **Sintesi della previsione**

Modello di previsione selezionato: ARIMA(2,0,2)

Numero di previsioni generate: 12

Numero di periodi trattenuti per convalida: 0

	<i>Stima</i>	<i>Convalida</i>
<i>Statistica</i>	<i>Periodo</i>	<i>Periodo</i>
RMSE	34,962	
MAE	27,4088	
MAPE		
ME	-2,24837	
MPE		

### Sintesi del modello ARIMA

Parametro	Stima	Errore std.	T	P-value
AR(1)	1,53391	0,107727	14,2389	0,000000
AR(2)	-0,653291	0,113394	-5,76123	0,000001
MA(1)	0,80225	0,0615094	13,0427	0,000000
MA(2)	0,256982	0,0704094	3,64983	0,000546

Previsione storica: sì

Varianza stimata di rumore bianco = 1226,77 con 61 gradi di libertà

Deviazione standard stimata di rumore bianco = 35,0253

Numero di iterazioni: 11

Grafico 17: Grafico delle sequenze temporali.

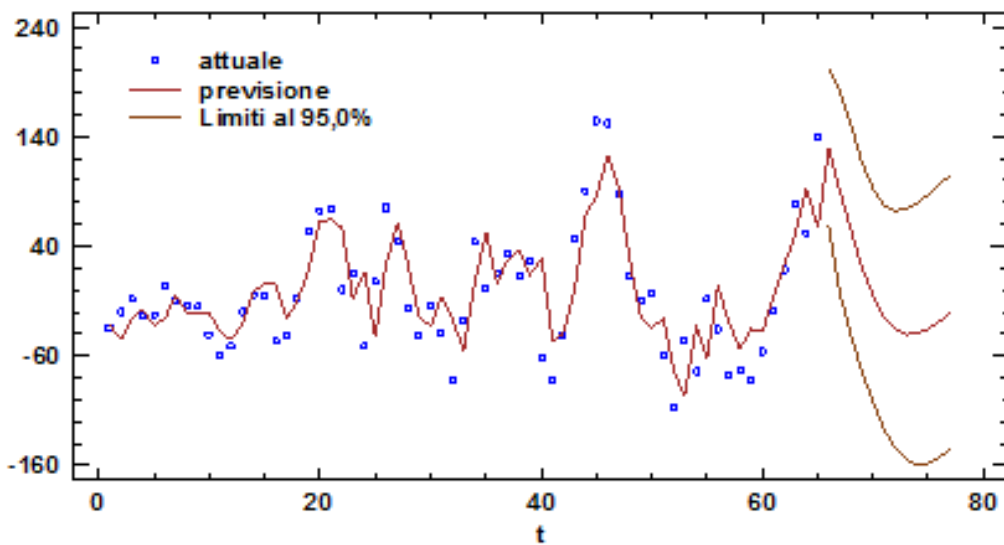
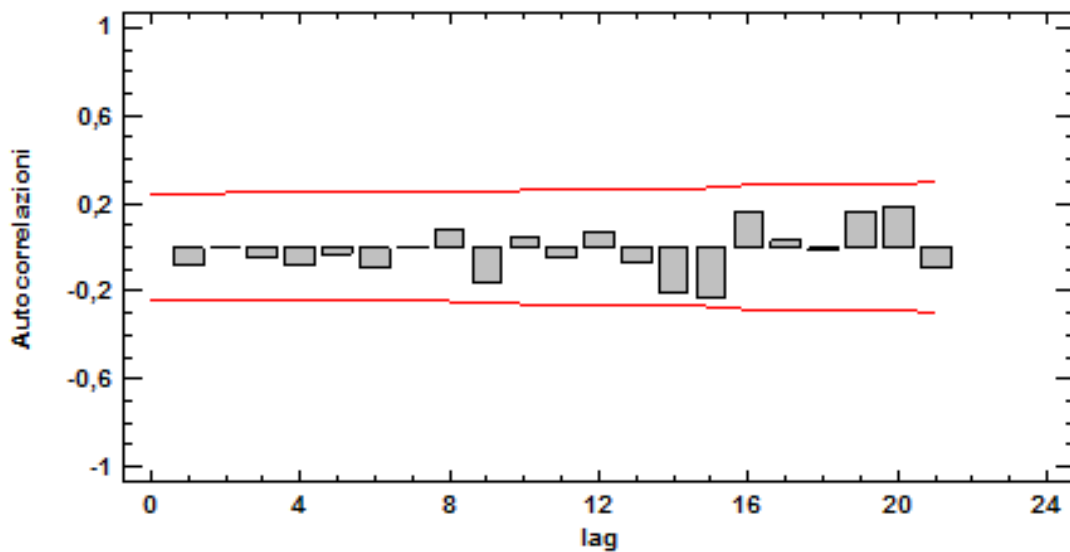
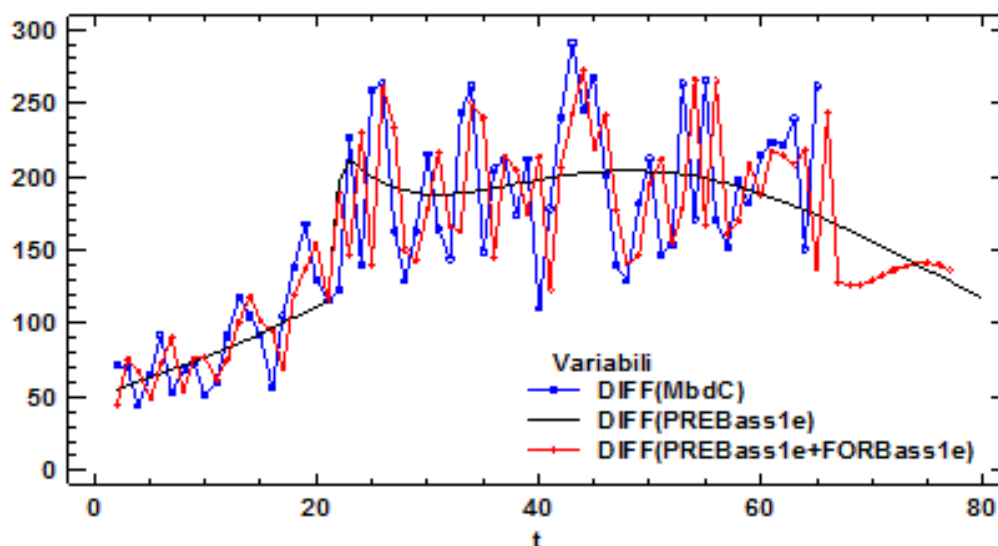


Grafico 18: Grafico del test sui residui.



L'applicazione del modello ARMAX (2,0,2) è migliorativa del modello GBM con uno shock esponenziale in termini di riduzione della devianza, che risulta minore di circa la metà (passando da 182.878 a 74.832,97). Il modello risulta inoltre abbastanza centrato se si guarda ai valori della statistica  $t$  e dei  $p$ -values.

Grafico 19: Grafico di confronto sulle differenziazioni di: dati cumulati, previsioni del GBM con uno shock esponenziale, previsioni del processo ARMAX (2,0,2).



Il grafico di confronto fra le osservazioni istantanee, le previsioni del GBM con uno shock esponenziale e il successivo affinamento dato dal modello ARMAX (2,0,2), evidenzia una migliore capacità previsionale di tale modello rispetto al modello standard di Bass; rimane comunque di dubbia validità la previsione riguardante la chiusura “prematura” del ciclo di vita del prodotto.

Da un’analisi ancora più puntuale del Grafico 15 appare una discrepanza fra le previsioni del modello e le osservazioni, intorno alla quarantesima mensilità, tale da far ritenere che vi sia la presenza di uno shock di tipo rettangolare. Tale procedura è presentata nella sezione seguente.

### 2.2.2.2 Il GBM con uno shock esponenziale e uno shock rettangolare

In questo caso si è ritenuto necessario intervenire con una combinazione di due *shocks* – il primo di carattere esponenziale ed il secondo rettangolare – per descrivere comportamenti locali differenti. Lo shock rettangolare riesce ad individuare, nel caso in esame, la finestra temporale nella quale si situa una depressione delle vendite.

### La regressione non lineare: il GBM con uno shock esponenziale ed uno rettangolare.

Variabile dipendente: MbdC (Dati cumulati di vendita)

Variabili indipendenti: t

Funzione da stimare:  $m \cdot (1 - \text{EXP}(-(p+q) \cdot (t + (c1/b1) \cdot (\text{EXP}(b1 \cdot (t-a1)) - 1) \cdot (a1 \leq t) + c2 \cdot (t-a2) \cdot (a2 \leq t) \cdot (t \leq b2) + c2 \cdot (b2-a2) \cdot (b2 < t)))) / (1 + (q/p) \cdot \text{EXP}(-(p+q) \cdot (t + (c1/b1) \cdot (\text{EXP}(b1 \cdot (t-a1)) - 1) \cdot (a1 \leq t) + c2 \cdot (t-a2) \cdot (a2 \leq t) \cdot (t \leq b2) + c2 \cdot (b2-a2) \cdot (b2 < t))))$

Stime dei parametri iniziali:

m = 12000,0  
 p = 0,00396256  
 q = 0,0577808  
 c1 = 1,34  
 b1 = -0,67  
 a1 = 22,0  
 c2 = -0,2  
 a2 = 46,0  
 b2 = 52,0

Metodo di stima: Marquardt

Stima raggiunta per la convergenza della somma residua dei quadrati.

Numero di iterazioni: 17

Numero di chiamate di funzione: 184

### Risultati della stima

			Intervallo di confidenza al 95,0%	
		Errore standard	asintotico	
Parametro	Stima	Asintotico	inferiore	superiore
m	15053,8	308,907	14435,0	15672,6
p	0,0033157	0,0000519215	0,00321169	0,00341971
q	0,0514868	0,00139467	0,0486929	0,0542806
c1	1,21712	0,417737	0,380293	2,05395
b1	-0,478009	0,201619	-0,881901	-0,0741168
a1	22,2007	0,558696	21,0815	23,3199
c2	-0,224526	0,0487996	-0,322284	-0,126768
a2	46,019	0,930742	44,1544	47,8835
b2	52,4494	0,864715	50,7172	54,1816

### Analisi della varianza

Sorgente	Somma dei quadrati	G.l.	Media dei quadrati
Modello	1,94531E9	9	2,16145E8
Residuo	108874,	56	1944,18
Totale	1,94542E9	65	
Totale (Corr.)	6,88009E8	64	

R-quadrato = 99,9842 percento

R-quadrato (adattato per g.l.) = 99,9819 percento

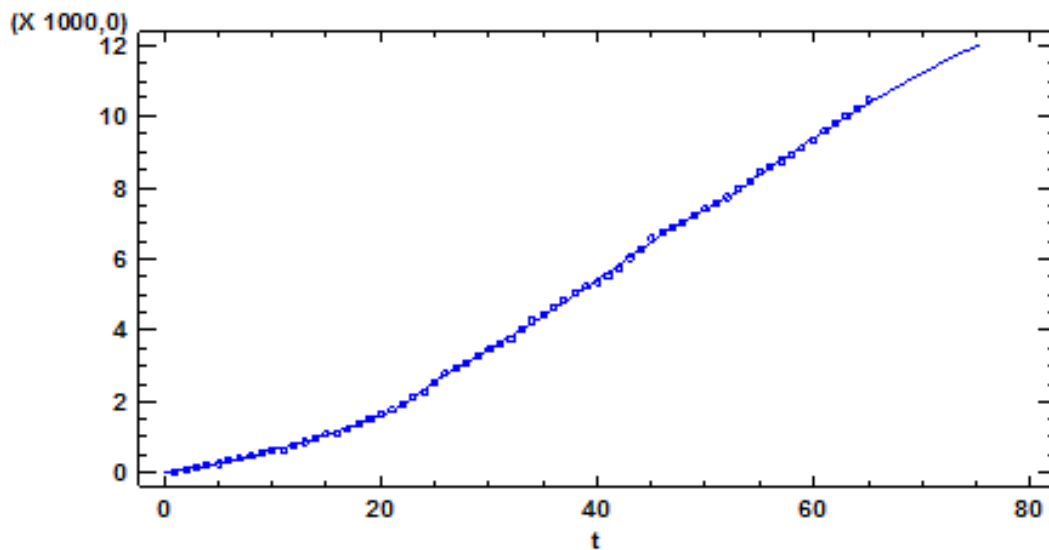
Errore standard della stima = 44,0928

Errore assoluto medio = 32,6701

Statistica di Durbin-Watson = 0,885035

Autocorrelazione residua al lag 1 = 0,525139

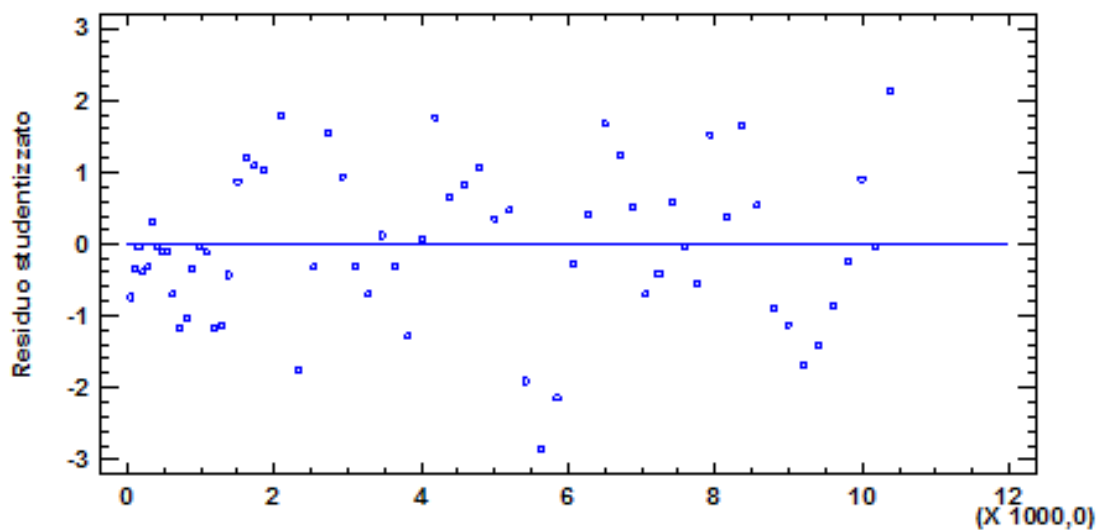
Grafico 20: Grafico del GBM con uno shock esponenziale e uno shock rettangolare.



L'impiego di un modello di Bass generalizzato caratterizzato dalla presenza di uno shock esponenziale e di un successivo shock rettangolare, ha permesso di descrivere in maniera più esatta l'evoluzione della serie storica. Guardando infatti alle stime risultanti dall'applicazione di tale modello, emerge un guadagno in termini di adattamento ( $R^2 = 0,999842$ ) sia rispetto al modello standard di Bass sia al GBM con un solo shock esponenziale. In particolare, gli intervalli di confidenza risultano particolarmente stretti e permettono di individuare con ragionevole sicurezza il posizionamento degli *shocks* nonché il loro segno. L'individuazione di un secondo shock, di tipo rettangolare, ha permesso di stimare con maggiore certezza il punto in cui avviene il primo shock esponenziale, e cioè alla ventiduesima osservazione corrispondente al mese di Febbraio 2007. Si tratta di uno shock positivo con la presenza di una smemorizzazione certa (il segno dell'intervallo di stima del parametro  $b_1$  è incontrastato). Per quanto riguarda il secondo shock, invece, esso si situa in una finestra compresa fra la quarantaseiesima e la cinquantaduesima osservazione (corrispondenti ai mesi di Febbraio ed Agosto 2009). Le stime e gli intervalli di confidenza relativi ai parametri  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  convalidano l'esistenza di uno shock rettangolare negativo.

Il test di Durbin-Watson (pari a 0,885035) e l'analisi grafica dei residui suggeriscono, anche in questo caso, la possibilità di intervenire con il modello ARMA per effettuare un affinamento delle previsioni.

Grafico 21: Grafico dei residui – modello di Bass generalizzato con uno shock esponenziale e uno shock rettangolare.



### **Previsione con processo ARMAX (2,0,1)**

Variabile: MbdC-PREBass1e1r

Numero di osservazioni = 65

Indici temporali: t

Lunghezza della stagionalità = 12

### **Sintesi della previsione**

Modello di previsione selezionato: ARIMA(2,0,1)

Numero di previsioni generate: 12

Numero di periodi trattenuti per convalida: 0

	<i>Stima</i>	<i>Convalida</i>
<i>Statistica</i>	<i>Periodo</i>	<i>Periodo</i>
RMSE	30,921	
MAE	23,2243	
MAPE		
ME	0,302364	
MPE		

### **Sintesi del modello ARIMA**

<i>Parametro</i>	<i>Stima</i>	<i>Errore std.</i>	<i>T</i>	<i>P-value</i>
AR(1)	1,45264	0,0981436	14,8012	0,000000
AR(2)	-0,643513	0,0987131	-6,51903	0,000000
MA(1)	1,0231	0,0196223	52,1395	0,000000

Previsione storica: sì

Varianza stimata di rumore bianco = 970,099 con 61 gradi di libertà

Deviazione standard stimata di rumore bianco = 31,1464

Numero di iterazioni: 19

Grafico 22: Grafico delle sequenze temporali.

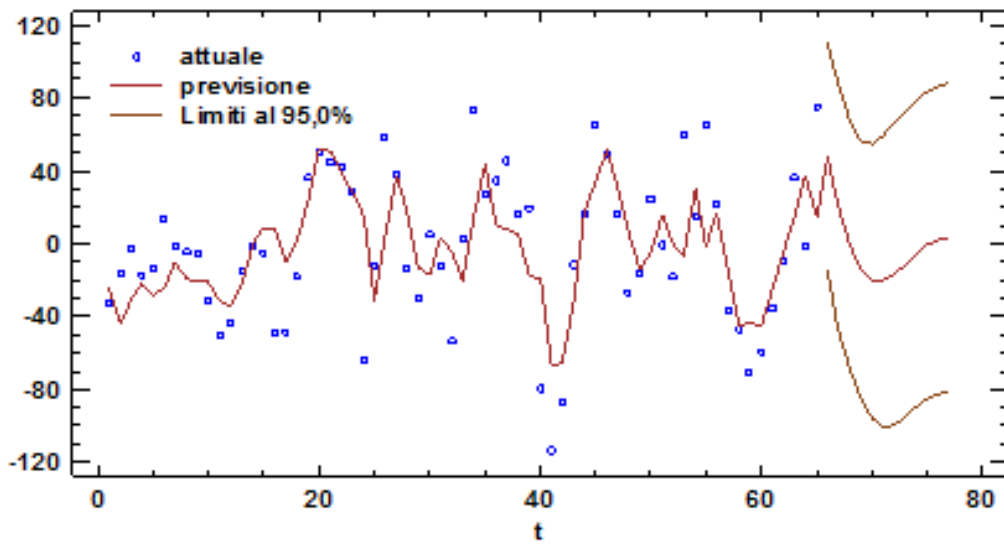
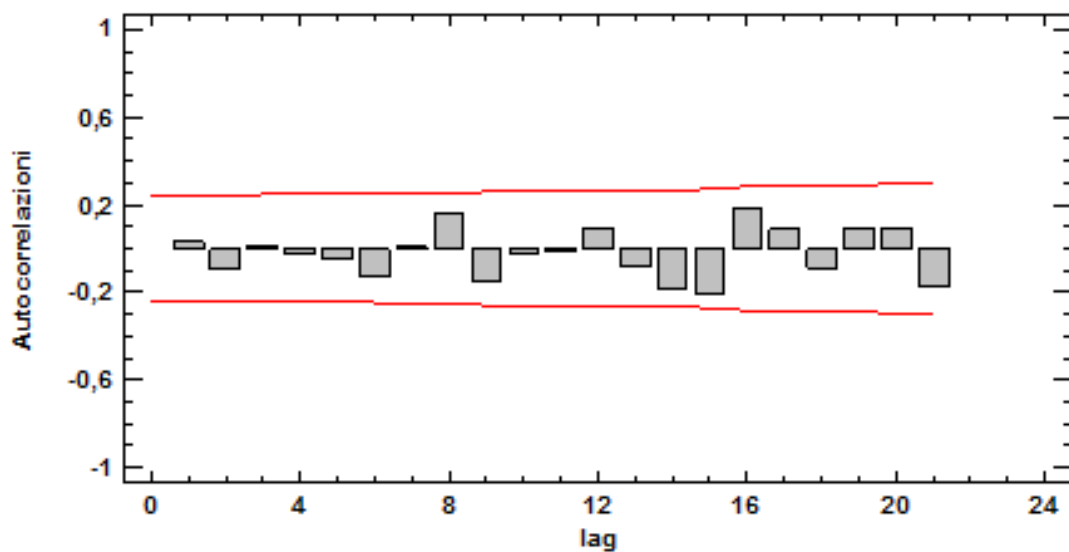
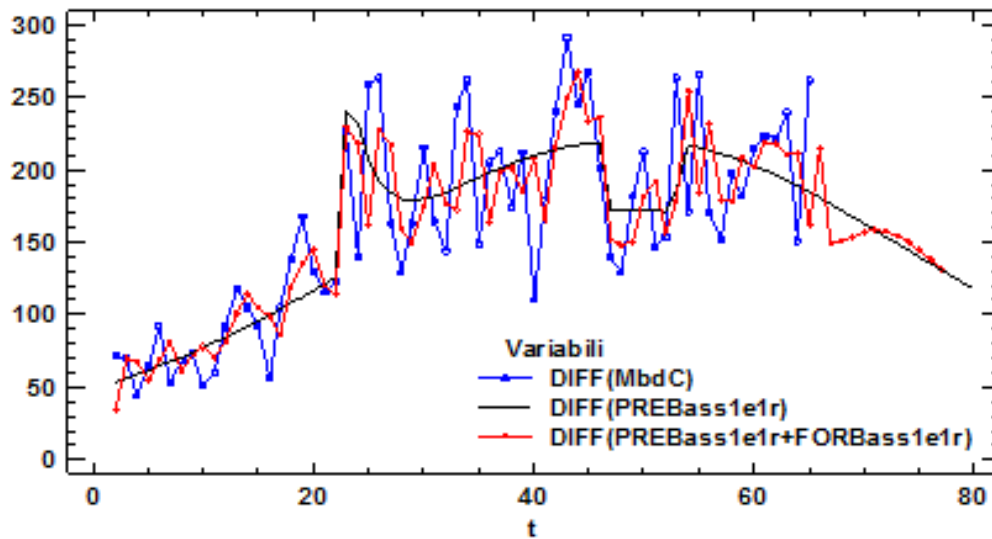


Grafico 23: Grafico del test sui residui.



Il modello ARMAX (2,0,1) risulta centrato, con riferimento alla statistica  $t$  e ai  $p$ -values, e permette di ridurre la devianza del modello in maniera notevole arrivando a dimezzarla (da 108.874 a 59.176).

Grafico 24: Grafico di confronto sulle differenziazioni di: dati cumulati, previsioni del GBM con uno shock esponenziale e uno shock rettangolare.



Il grafico di confronto dimostra che la previsioni del modello di Bass generalizzato caratterizzato da due *shocks* – il primo esponenziale ed il secondo rettangolare – e i successivi affinamenti risultanti dall’applicazioni del processo ARMAX ricalcano quasi esattamente le osservazioni istantanee. Si tratta di un affinamento descrittivo piuttosto che previsionale dato che le previsioni future tendono a coincidere con la chiusura forzata della serie caratteristica del modello standard di Bass.

### 2.2.3 Considerazioni sull’analisi dei modelli della famiglia di Bass

L’analisi evidenzia la criticità classica dei modelli della famiglia di Bass, rappresentata dalla chiusura del ciclo attorno alla centesima osservazione, considerata troppo prematura rispetto alla tipologia del prodotto e al suo mercato di riferimento. Nonostante ciò, tali modelli possiedono una notevole capacità descrittiva del mercato in termini di tipologie di adottandi e di spiegazione dell’insorgenza di perturbazioni attraverso l’inserimento di specifici *shocks*.

Per quanto riguarda la tipologia di adottandi, la descrizione è data dal rapporto  $q/p$  che rappresenta la quota asintotica degli innovatori: nel modello standard di Bass tale valore è pari al 18,83%, confermato anche dal modello di Bass generalizzato con uno shock esponenziale ed uno rettangolare (18,1%). Queste quote indicano una notevole percentuale di innovatori, ovvero attori che agiscono in maniera informata e consapevole nel mercato. Ciò trova riscontro nella realtà in quanto gli utenti del mercato degli strumenti musicali tendono a compiere scelte di acquisto seguendo non tanto le azioni di marketing tradizionali (pubblicità), quanto più dati tecnici e prestazioni effettive dei vari prodotti [Centro ASK, 2007].

Considerando sempre la fase descrittiva, gli *shocks* inseriti nel modello di Bass generalizzato riescono a riprodurre con ottima approssimazione l’andamento della serie storica, anche se la loro interpretazione non è univocamente definita, in particolare per quello

rettangolare. Infatti, se il primo shock si situa nel momento in cui l'impresa ha iniziato a presentare il prodotto durante manifestazioni fieristiche e mediante *shows* dal vivo con musicisti affermati nei centri di distribuzione, il secondo non trova un riscontro certo nella realtà. Esso può essere interpretato in due modi: o come impatto negativo causato dalla recente crisi economica, oppure come momento di naturale flessione delle vendite che si verifica normalmente in prodotti più maturi della stessa impresa<sup>4</sup>.

### 2.2.4 Il modello Guseo-Guidolin

Un percorso parallelo che è stato intrapreso al fine di studiare la serie storica cumulata delle vendite del prodotto oggetto di studio, è quello incentrato sull'applicazione del modello Guseo-Guidolin [2009]. Tale modello si presenta come un'evoluzione del modello di Bass generalizzato con l'inserimento di due ulteriori parametri ( $p_c$  e  $q_c$ ) per permettere di separare le fasi di informazione ed adozione. Tale suddivisione consente di valutare in maniera più accurata l'impatto delle strategie di marketing e comunicazione sull'andamento delle adozioni del prodotto. La formulazione caratteristica del modello è la seguente:

$$z(t) = k \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c+q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c+q_c)t}} \frac{1 - e^{-(p_s+q_s)t}}{1 + \frac{q_s}{p_s} e^{-(p_s+q_s)t}}$$

ove i nuovi parametri  $p_c$  e  $q_c$  rappresentano la fase di comunicazione, mentre i parametri  $p_s$  e  $q_s$ , come nel modello di Bass, rappresentano i parametri di adozione. In questo modello  $K$  rappresenta il numero massimo di adottanti potenziali.

### La regressione non lineare: il modello Guseo-Guidolin

Variabile dipendente: MbdC (Dati cumulati di vendita)

Variabili indipendenti: t

Funzione da stimare:  $K * \text{SQRT}((1 - \text{EXP}(-\text{SQRT}((q_c - p_c - 0)^2 + 4 * (q_c + 0) * p_c) * t)) / ((1 / ((- (q_c - p_c - 0) - \text{SQRT}((q_c - p_c - 0)^2 + 4 * (q_c + 0) * p_c)) / (-2 * (q_c + 0)))) - (1 / ((- (q_c - p_c - 0) + \text{SQRT}((q_c - p_c - 0)^2 + 4 * (q_c + 0) * p_c)) / (-2 * (q_c + 0)))) * \text{EXP}(-\text{SQRT}((q_c - p_c - 0)^2 + 4 * (q_c + 0) * p_c) * t)) * (1 - \text{EXP}(-\text{SQRT}((q_s - p_s - 0)^2 + 4 * q_s * p_s) * t)) / ((1 / ((- (q_s - p_s - 0) - \text{SQRT}((q_s - p_s - 0)^2 + 4 * q_s * p_s)) / (-2 * q_s))) - (1 / ((- (q_s - p_s - 0) + \text{SQRT}((q_s - p_s - 0)^2 + 4 * q_s * p_s)) / (-2 * q_s)))) * \text{EXP}(-\text{SQRT}((q_s - p_s - 0)^2 + 4 * q_s * p_s) * t))$

Stime dei parametri iniziali:

$$K = 50000,0$$

$$q_c = 0,081$$

$$p_c = 0,0038$$

$$q_s = 0,018$$

$$p_s = 0,001$$

Metodo di stima: Marquardt

Stima raggiunta per la convergenza della somma residua dei quadrati.

Numero di iterazioni: 118

<sup>4</sup> Tali informazioni sono state fornite dalla Dott.ssa Sandra Mosca, Direttore commerciale di Parsek S.r.l. .

Numero di chiamate di funzione: 825

### Risultati della stima

			Intervallo di confidenza al 95,0%	
		Errore standard	asintotico	
Parametro	Stima	asintotico	inferiore	Superiore
K	172195,	12540,5	147110,	197279,
qc	0,0744522	0,00717477	0,0601005	0,0888039
pc	0,00948898	0,000816134	0,00785647	0,0111215
qs	0,00440839	0,00209599	0,000215773	0,008601
ps	0,000841649	102291,	-204612,	204612,

### Analisi della varianza

Sorgente	Somma dei quadrati	G.l.	Media dei quadrati
Modello	1,94514E9	5	3,89028E8
Residuo	277406,	60	4623,44
Totale	1,94542E9	65	
Totale (Corr.)	6,88009E8	64	

R-quadrato = 99,9597 percento

R-quadrato (adattato per g.l.) = 99,957 percento

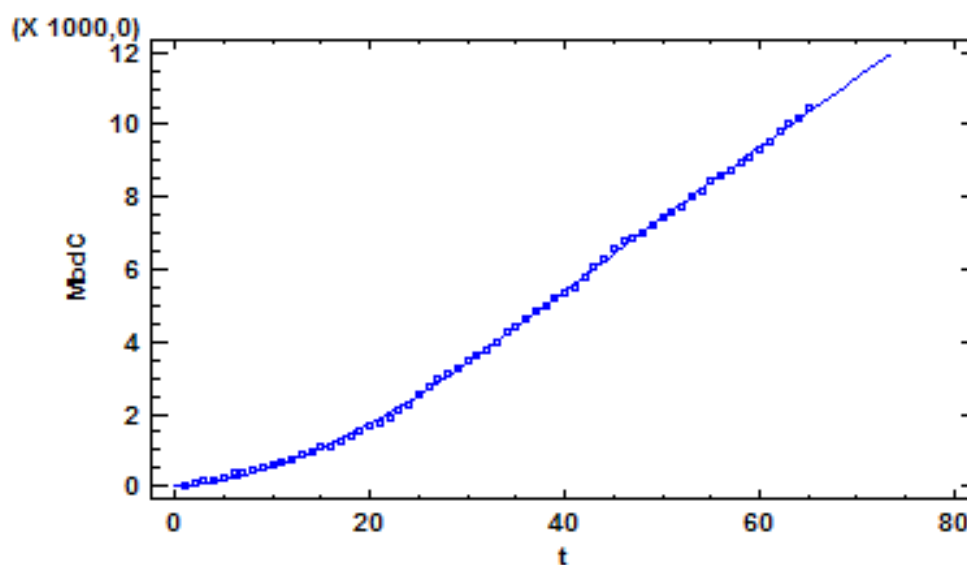
Errore standard della stima = 67,9959

Errore assoluto medio = 53,6286

Statistica di Durbin-Watson = 0,415671

Autocorrelazione residua al lag 1 = 0,77837

Grafico 25: Grafico del modello Guseo-Guidolin.

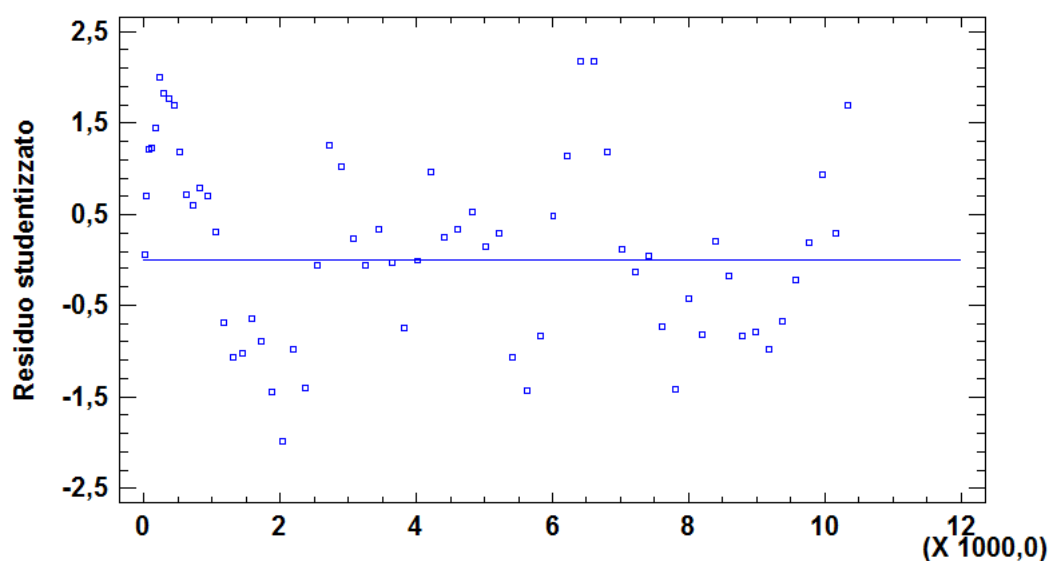


Il modello Guseo-Guidolin presenta un adattamento accettabile guardando al  $R^2$  (0,999597) ed agli intervalli di confidenza dei parametri se si esclude il parametro  $p_s$  per il quale, nonostante i numerosi tentativi, non è stata raggiunta la centratura esatta. Il mercato potenziale stimato da questo modello, è pari a circa 172.806 unità. Tale risultato si discosta notevolmente dalle stime prodotte dai modelli standard di Bass e generalizzato. Ciò avviene

perché nel modello Guseo-Guidolin viene a mancare quella forzatura teorica secondo la quale il ciclo di vita tende a chiudere dopo il raggiungimento del picco di adozioni che si pone intorno alla metà della “campana” di distribuzione della serie storica.

Passando alla valutazione dei parametri propri del modello Guseo-Guidolin, si evidenzia che le stime di  $p_c$  e  $q_c$  pari rispettivamente a 0,00948737 e 0,0744514 sono equidistanti dai limiti individuati dagli Autori del modello per poter identificare la qualità della comunicazione attuata da parte dell’impresa a supporto del prodotto. Ciò induce a pensare che le strategie di sostegno alle vendite per il tramite di pubblicità ed azioni di marketing canoniche siano state escluse dall’azienda.

Grafico 26: Grafico dei residui – modello Guseo-Guidolin.



Come si è proceduto per gli altri modelli, sono stati analizzati i residui e le loro autocorrelazioni. Il test di Durbin-Watson essendo pari a 0,415678 indica la presenza di autocorrelazione, confortata dall’analisi grafica dei residui, che evidenzia un andamento oscillatorio degli stessi. Pertanto, si è proceduto all’applicazione del processo ARMA per l’affinamento delle previsioni.

### **Previsione con processo SARMAX (2,0,0)x(1,0,2)**

Variabile: MbdC-PREGugu

Numero di osservazioni = 65

Indici temporali: t

Lunghezza della stagionalità = 12

### **Sintesi della previsione**

Modello di previsione selezionato: ARIMA(2,0,0)x(1,0,2)12

Numero di previsioni generate: 12

Numero di periodi trattenuti per convalida: 0

	<i>Stima</i>	<i>Convalida</i>
<i>Statistica</i>	<i>Periodo</i>	<i>Periodo</i>
RMSE	33,7014	
MAE	26,7165	
MAPE		
ME	1,58489	
MPE		

### Sintesi del modello ARIMA

<i>Parametro</i>	<i>Stima</i>	<i>Errore std.</i>	<i>t</i>	<i>P-value</i>
AR(1)	1,12437	0,126945	8,85712	0,000000
AR(2)	-0,385126	0,127443	-3,02195	0,003689
SAR(1)	0,852077	0,0590218	14,4366	0,000000
SMA(1)	1,05195	0,086034	12,2272	0,000000
SMA(2)	-0,661927	0,058513	-11,3125	0,000000

Previsione storica: sì

Varianza stimata di rumore bianco = 1321,21 con 60 gradi di libertà

Deviazione standard stimata di rumore bianco = 36,3485

Numero di iterazioni: 20

Grafico 27: Grafico delle sequenze temporali.

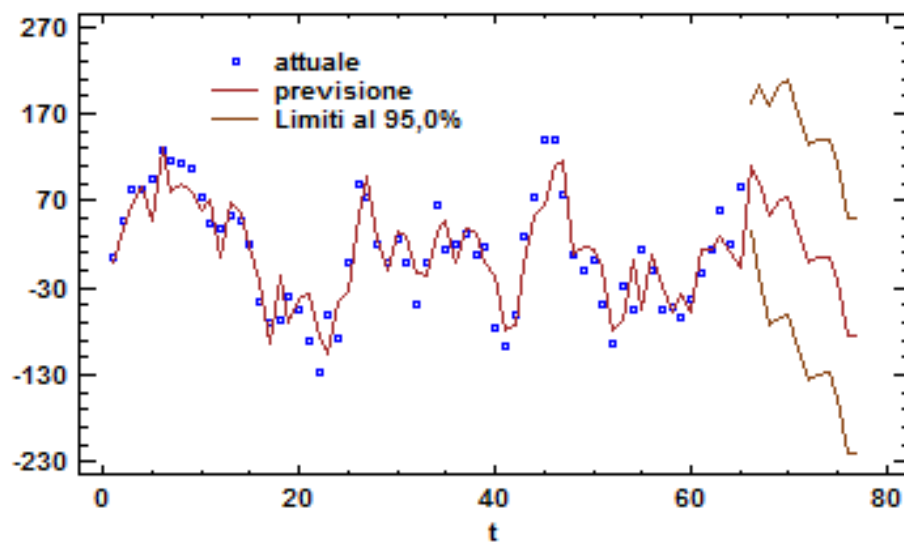
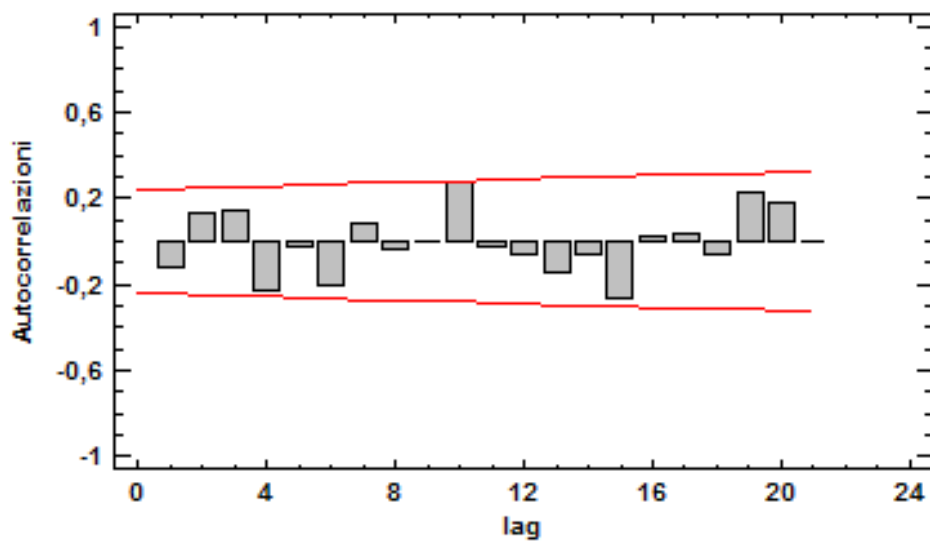
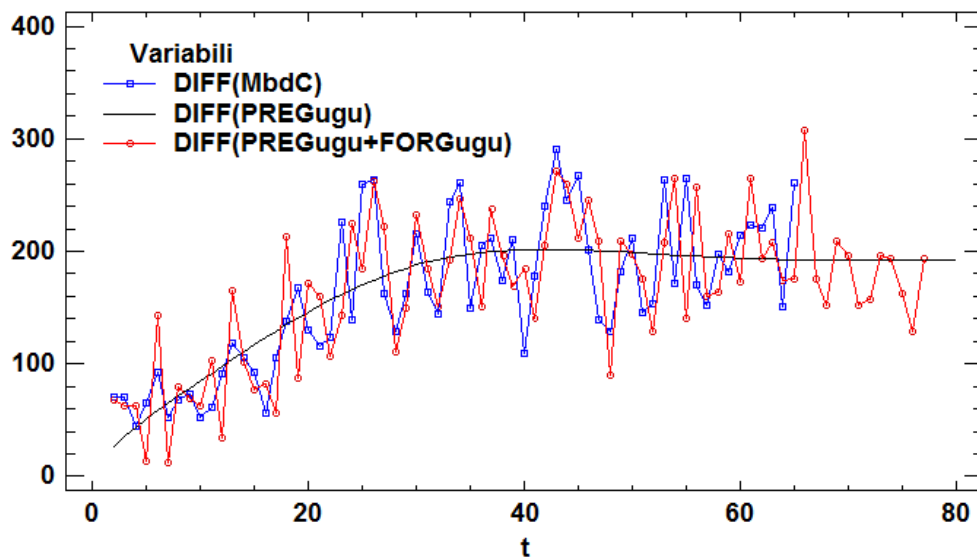


Grafico 28: Grafico del test sui residui.



Il processo SARMAX (2,0,0)x(1,0,2) presenta una buona centratura con riguardo alle statistiche  $t$  e ai  $p$ -values delle singole componenti. Inoltre, riduce in maniera importante la devianza passando dal valore di 277.404 del modello stimato al 79.279.

Grafico 29: Grafico di confronto sulle differenziazioni di: dati cumulati, previsioni del modello Guseo-Guidolin, previsioni del modello SARMAX (2,0,0)x(1,0,2).



Il Grafico 29 mette a confronto i valori previsti dal modello Guseo-Guidolin ed affinati dal processo SARMAX con le osservazioni istantanee. L'adattamento è più che buono in generale, ottimo in alcuni punti – soprattutto nella parte centrale. Il punto di maggior importanza delle previsioni di tale modello, risulta essere la posticipazione della chiusura del

ciclo di vita. Tale idea appare molto più realistica rispetto ai modelli precedenti soprattutto con riferimento al mercato degli strumenti musicali, in cui il prodotto si situa.

#### **2.2.4.1 Considerazioni sull'analisi del modello Guseo-Guidolin**

Tale modello presenta una previsione decisamente più credibile rispetto al modello di Bass con riguardo al mercato potenziale anche se, probabilmente, vi è una sovrastima della durata del ciclo di vita del prodotto – infatti, la chiusura è stimata attorno alla settecentesima osservazione.

Durante l'analisi sono state utilizzate diverse stime di partenza che hanno dato risultati peggiori come centratura, ma più credibili dal punto di vista di chiusura del ciclo – stimata attorno alla duecentocinquantesima osservazione. Si è scelto tuttavia di adottare come stime dei parametri iniziali quelle utilizzate da Guseo e Guidolin [2011] per lo studio della diffusione di un farmaco. Grazie all'utilizzo di tali stime, il modello ha segnalato un miglioramento del  $R^2$ , una riduzione della devianza ed un restringimento degli intervalli di confidenza, che precedentemente risultavano essere troppo ampi e con segno contrastato. Tutto questo a meno del parametro  $p_s$ , il cui ampio intervallo, contenente lo zero, porta a ritenere poco significativa tale componente. La scelta di utilizzare tali stime di partenza è parsa idonea per la somiglianza fra la diffusione dei prodotti farmaceutici e quella degli strumenti musicali. Le ipotesi formulate in precedenza riguardo la comunicazione trovano conferma nelle parole del Direttore commerciale di Parsek s.r.l.: «Per quanto riguarda i canali informativi, la semplice pubblicità “di tipo ortodosso” ... non viene da noi spesso usata in quanto riteniamo che agire attraverso un marketing “laterale” dia frutti maggiori. Ad esempio noi usiamo molto come veicolo pubblicitario “il musicista” che quindi amando il nostro prodotto lo usa nelle sue esibizioni, sui palchi e il suono che ne esce fuori viene notato e quindi apprezzato».

## CONCLUSIONI

Sulla base dell'analisi statistica realizzata al fine di valutare i modelli utilizzati, risulta necessario porre una distinzione logica fra fase descrittiva e fase previsiva.

Da un punto di vista meramente descrittivo il modello che riesce meglio ad adattarsi all'andamento dei dati osservati appare il modello di Bass generalizzato con uno shock esponenziale ed uno rettangolare, che riesce ad individuare i cambiamenti di regime nella serie. Ciò appare del tutto scontato, poiché il teorema di monotonia indica che al complicarsi del modello aumenta l'adattamento descrittivo.

L'ambito più interessante per questo studio risulta però la fase previsionale. Tenendo conto del risultato delle analisi e delle caratteristiche del mercato degli strumenti musicali, sembra congruo ritenere che il prodotto studiato abbia un ciclo di vita lungo e stazionario. Per questo motivo il modello standard di Bass ed il modello generalizzato caratterizzato da *shocks* non sono ritenuti idonei da un punto di vista previsionale; il mercato residuo infatti risulta decisamente sottostimato, basti pensare che all'ultimo rilevamento disponibile i pezzi venduti erano 10.433, ed il mercato potenziale stimato risulterebbe pari a circa 15.000 unità.

Risultano per contro migliori per tale analisi i modelli di Norton e Bass e di Guseo-Guidolin. Il primo dei due, qualora si circoscriva il periodo temporale della previsione in un tempo ragionevolmente limitato, riesce ad individuare una quota di vendite medie mensili realistica. Se invece si allunga tale orizzonte, il modello perde di significatività in quanto non individua il termine del ciclo di adozioni.

Il modello Guseo-Guidolin risulta decisamente più utile da un punto di vista previsivo, innanzitutto perché viene a cadere la forzatura logica propria del modello di Bass per cui il ciclo di vita entra nella fase discendente dopo aver raggiunto il picco della "campana" nel punto  $(z^+; t^+)$ . In secondo luogo, consente di scindere in due componenti distinte la fase di adozione e quella di informazione, permettendo una più puntuale determinazione degli effetti delle strategie di marketing e di comunicazione messe in atto da Parsek s.r.l.

Infine, allungando l'orizzonte temporale viene prevista la "sella" caratteristica del modello nel punto in cui si esaurisce la spinta comunicativa istituzionale dell'impresa, ipotesi più che realistica in riferimento al mercato.

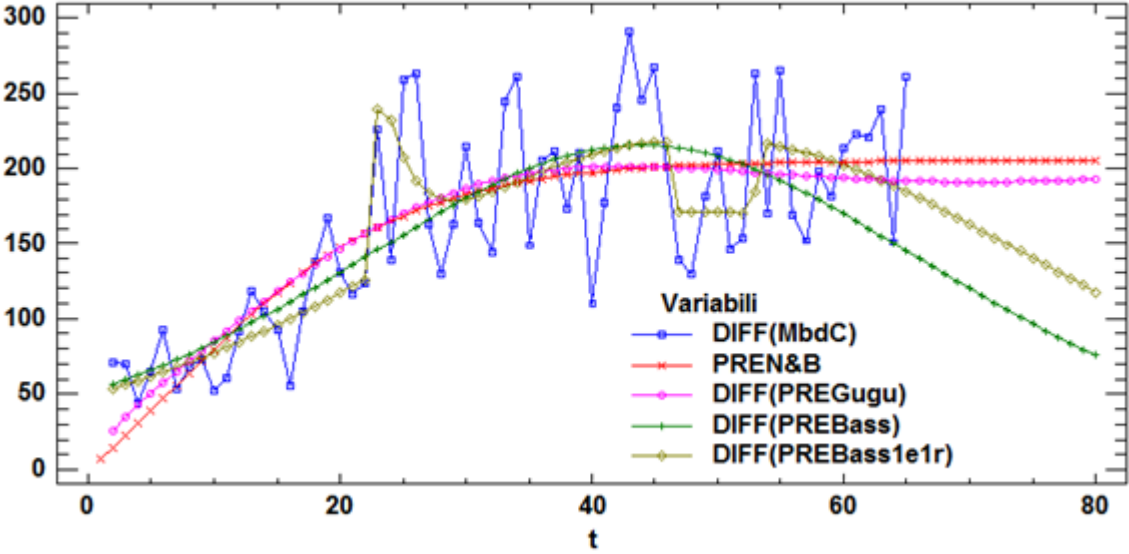
Solo grazie all'applicazione di modelli statistici a semplici dati di vendita, è stato possibile descrivere in maniera sorprendentemente chiara il mercato di riferimento, gli attori agenti in esso e le azioni di marketing messe in atto dall'impresa. Infatti l'analisi del rapporto  $q/p$ , come precedentemente sottolineato, segnala che nel mercato di riferimento una parte rilevante degli attori agisce in maniera informata e cosciente, dato che trova riscontro nella realtà. Allo stesso modo, l'azienda ha confermato che la politica comunicativa attuata non prevede azioni di marketing dirette a supporto del prodotto, quanto piuttosto azioni di marketing "laterale" (esibizioni ed utilizzo degli apparati da parte di musicisti di chiara fama).

In conclusione, quindi, allo stato attuale del processo di diffusione, il prodotto oggetto dell'analisi dovrebbe avere, con ragionevole certezza, un ciclo di vita ancora lungo e senza perturbazioni significative di natura endogena<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> Un confronto grafico dei diversi modelli applicati è offerto nel Grafico 30.

Grafico 30: Grafico di confronto fra i modelli più significativi.



## APPENDICE STATISTICA

### A) Modello standard di Bass

L'equazione di base del modello standard di Bass si ottiene come caso particolare dell'equazione di Riccati a coefficienti costanti, e assume la forma di

$$y' = (p + qy)(1 - y) \quad p, q > 0 \quad (1)$$

dove  $y$  è una funzione di ripartizione e  $y'$  è la corrispondente densità. Considerando il modello di Bass come un *hazard rate* – che esprime il livello della probabilità condizionata (al fatto che la vendita non sia stata attuata) della vendita – è possibile riformulare la (1) come segue:

$$\frac{y'}{1-y} = (p + qy) \quad p, q > 0. \quad (2)$$

In riferimento a un conteggio in termini assoluti degli eventi di interesse si pone

$$z = ym \quad (3)$$

dove  $z$  rappresenta le unità vendute,  $y$  rappresenta la probabilità che la vendita si realizzi,  $m$  rappresenta il totale della numerosità degli eventi nel dominio di riferimento (*carrying capacity*). L'equazione base del modello di Bass può quindi essere riscritta come

$$z' = m \left( p + q \frac{z}{m} \right) \left( 1 - \frac{z}{m} \right) = \left( p + q \frac{z}{m} \right) (m - z) . \quad (4)$$

Ovvero, la variazione istantanea del processo di accumulo delle vendite è governato dalla somma di due componenti:  $p(m - z)$  esprime, con il parametro  $p$ , l'effetto innovativo del processo dovuto all'azione esterna (comunicazione d'impresa, azione pubblicitaria) ed è direttamente proporzionale al mercato residuo. Il secondo addendo,  $q(z/m)(m - z)$ , esprime, con il parametro  $q$  – controllato da una componente inerziale – l'effetto imitativo del processo, dovuto in larga misura al cosiddetto “passaparola”. L'equazione diventa allora esprimibile come segue:

$$y' + qy^2 + (p - q)y - p = 0 . \quad (5)$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono  $r_1 = -(p/q)$  e  $r_2 = 1$ , per cui la soluzione passante per l'origine  $y(0) = 0$  ha come asintoti le due radici ed è monotona crescente. Per sostituzione si otterrà pertanto

$$y(t) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \quad (6)$$

ovvero, poiché  $z = ym$ ,

$$z(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}, \quad t > 0; p, q > 0 . \quad (7)$$

Il punto di flesso di  $z(t)$  si ottiene per

$$t^+ = \frac{\ln(\frac{q}{p})}{(p+q)} \quad (8)$$

e assume il valore

$$z(t^+) = m \left( \frac{1}{2} - \frac{p}{2q} \right) . \quad (9)$$

Si dimostra inoltre che  $y'(t)$  è simmetrica limitatamente all'intervallo  $(0, 2t^+)$  con asse in  $t^+$  che rappresenta il picco massimo di vendite che appunto si avrà circa a metà periodo di vendita:

$$y'(t) = \frac{p(p+q)^2 e^{-(p+q)t}}{(p+q e^{-(p+q)t})^2} . \quad (10)$$

## B) Aspetti asintotici degli innovatori nel modello di Bass

Poiché l'equazione di Bass,  $y' = p(1-y) + qy(1-y)$ , è costituito da due addendi in cui il primo misura il contributo istantaneo degli innovatori ed il secondo quello degli imitatori, è utile definire anche il contributo cumulato degli innovatori applicandone il suo integrale indefinito, nell'ipotesi che valga la condizione iniziale  $y(0) = 0$ ,

$$\widehat{F}_p(t) = \int p(1-y)dt = p \left[ t + \frac{p}{q}t - \frac{1}{q} \ln(q + p e^{(p+q)t}) - \widehat{k} \right] . \quad (11)$$

Analogo sarà il riferimento per la parte complementare associata agli imitatori. Da queste si può ricavare immediatamente l'integrale definito,

$$F_p(t) = \int_0^t p(1-y)d\tau = \frac{p}{q} \left\{ t(p+q) - \ln \left[ \frac{q + p e^{(p+q)t}}{p+q} \right] \right\} . \quad (12)$$

Si può ora valutare il contributo cumulato normalizzato degli innovatori,  $F_p(t)$ , in relazione al cumulo globale  $y = F(t)$ , precisamente  $Q_p = \frac{F_p(t)}{F(t)}$ . Analogo è il rapporto complementare normalizzato associato agli imitatori.

Vista la convergenza di  $F(t)$  verso l'unità per  $t \rightarrow \infty$ , sarà utile lo studio del limite di  $F_p(t) = \int_0^t p(1-y)d\tau$  per  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{F}_p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p}{q} \left\{ t(p+q) - \ln \left[ \frac{p e^{(p+q)t}}{p+q} \right] \right\} = \frac{q}{p} \ln \left( 1 + \frac{q}{p} \right) = pE(t) \quad (13)$$

con  $E(t) = \frac{\ln(1+q/p)}{q}$ , media aritmetica del processo standard di Bass.

Si può pertanto assumere che la quota asintotica degli innovatori dipenda solo dal rapporto  $q/p$ ; si veda a titolo esemplificativo la Tabella 4.

Tabella 4: Valori del rapporto  $q/p$  e relative quote asintotiche degli innovatori.

$q/p$	0,5	1	2	3	5	10	20	50	100	500
$\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{F}_p(t) * 100$	81	69	55	46	36	24	15	8	4,6	1,2

Fonte: Guseo, 2004b, p. 18.

### C) Modello di Bass generalizzato

Il modello standard di Bass non permette che l'evoluzione del processo di diffusione del prodotto venga influenzata da azioni *ad hoc* che modifichino, anche temporaneamente, tale diffusione. Per questo motivo nel 1994 Bass, insieme a Krishnan e Jain, ha generalizzato il proprio modello introducendo una funzione "portante"  $x(t)$  che consente di modificare la velocità di scorrimento del tempo. L'equazione del modello generalizzato di Bass è quindi data da:

$$z' = m \left( p + q \frac{z}{m} \right) \left( 1 - \frac{z}{m} \right) x(t) \quad (14)$$

ove  $x(t)$  è una funzione integrabile in domini limitati e non negativa. Nel modello standard di Bass tale funzione è uniformemente unitaria. Un posizionamento di  $x(t)$  nel dominio  $0 < x(t) < 1$  denota un rallentamento nella diffusione, ovvero una dilatazione del tempo, mentre un valore  $x(t) > 1$  indica una contrazione nei tempi ed una corrispondente sollecitazione del processo diffusivo. La soluzione del modello di Bass generalizzato è dunque

$$z(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}}, \quad t > 0, \quad p, q > 0. \quad (15)$$

A meno della costante moltiplicativa  $m$ , la precedente è una funzione di ripartizione nel dominio temporale  $[0, +\infty]$ . La funzione portante  $x(t)$  può accelerare o rallentare il processo di adozione. Tuttavia la forma dell'equazione non consente di modificare  $m$  mediante  $x(t)$ , quindi le variazioni di  $x(t)$  alterano la densità  $z'(t)/m$  conservando l'integrale.

#### C.1) Scelta della funzione di intervento e principali impulsi

Attraverso la funzione portante  $x(t)$  si possono inserire perturbazioni date da svariati fattori, quali: variazioni nel livello dei prezzi, strategie di comunicazione d'impresa, mutamento del contesto normativo.

Per evitare una complicazione antieconomica del modello, gli interventi classici si riducono all'introduzione di impulsi di tipo esponenziale e/o rettangolare.

Per quanto riguarda gli impulsi di tipo rettangolare, essi sono impulsi localmente stabili rispetto ad una *baseline* unitaria, e la rappresentazione algebrica è data da

$$x(t) = 1 + c_1 I_{t \geq a_1} I_{t \leq b_1} + c_2 I_{t \geq a_2} I_{t \leq b_2} + \dots + c_n I_{t \geq a_n} I_{t \leq b_n} \quad (16)$$

ove i parametri  $[a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n$  descrivono gli estremi di un intervallo chiuso con  $a_i < b_i$  e il parametro  $c_i$  identifica, se significativamente diverso da 0, lo spessore del contributo locale, sia esso positivo o negativo. Una tale formalizzazione traduce un comportamento transitorio stazionario: le funzioni indicatrici  $I$  assumono il valore 1 se l'evento indicato si è verificato e 0 altrimenti, consentendo l'attivazione selettiva dell'impulso in funzione dell'appartenenza di  $t$  al dominio descritto.

Per quanto riguarda gli impulsi di tipo esponenziale, essi si possono definire come *shocks* istantanei molto intensi seguiti da un effetto di assorbimento che riporta alla stazionarietà con differenti velocità. Algebricamente, si avrà:

$$x(t) = 1 + c_1 e^{b_1(t-a_1)} I_{t \geq a_1} + c_2 e^{b_2(t-a_2)} I_{t \geq a_2} + \dots + c_n e^{b_n(t-a_n)} I_{t \geq a_n} \quad (17)$$

dove i parametri  $a_i = 1, 2, \dots, n$  descrivono i tempi di insorgenza degli *shocks*, i parametri  $b_i = 1, 2, \dots, n$  assumono valori negativi per garantire la monotonia crescente della ripartizione e rappresentano, in termini assoluti, la velocità di decadimento dell'intervento, mentre i parametri  $c_i = 1, 2, \dots, n$  rappresentano l'ampiezza iniziale degli shock ed assumono segno positivo o negativo a seconda del tipo di intervento. Le funzioni indicatrici  $I$  sono invece definite come nel precedente caso degli impulsi rettangolari.

Nel caso in cui si verificano entrambe le tipologie di shock, si avrà:

$$x(t) = 1 + c_1 e^{b_1(t-a_1)} I_{t \geq a_1} + c_2 I_{t \geq a_2} I_{t \leq b_2} \quad (18)$$

ove i parametri coinvolti hanno il medesimo significato già descritto nei casi precedenti.

#### D) Modello di Norton e Bass

Il modello di Norton e Bass nasce per dare una rappresentazione del ciclo di vita di prodotti caratterizzati da un processo lungo e stazionario ed anche di prodotti con generazioni successive.

Tale approccio può essere adattato per la descrizione dei processi di diffusione istantanei essenzialmente stazionari su un livello  $m$  raggiunto dopo un periodo iniziale di crescita. Questo modello è stato elaborato da Norton e Bass nel 1987.

Supponendo che tale processo di diffusione sia descritto da un modello di Bass normalizzato con parametri costanti, sarà possibile descrivere l'evoluzione media delle vendite istantanee seguendo la formula (18):

$$F(t_i) = \frac{1 - e^{-(p_i + q_i)t_i}}{1 + \frac{q_i}{p_i} e^{-(p_i + q_i)t_i}} \quad (19)$$

ove  $p$  e  $q$  rappresentano, rispettivamente, le quote asintotiche degli innovatori e degli imitatori,  $t_i = t - c_i$  indica il tempo trascorso dall'origine  $c_i$ . Se non intervengono generazioni di innovazioni successive, il processo delle vendite istantanee sarà determinato da

$$S_{1,t} = F(t_1)m_1 \quad (20)$$

che diverrà stazionario sul picco potenziale  $m_1$ , che diversamente dal modello di Bass standard, descrive la quota media di adozioni istantanee, quando  $t \gg c_1$ .

È possibile intervenire con un'apposita perturbazione inserendo la funzione  $G_{(t_2)}$ :

$$\tilde{S}_{1,t} = m_1 \cdot F_{(t_1)} \cdot G_{(t_2)} \quad (21)$$

Nel caso di uno shock esponenziale, la funzione  $G_{(t_2)}$  assume la forma di

$$G_{(t_2)} = 1 + c_1 e^{b_1(t-a_1)} I_{t \geq a_1} \quad (22)$$

### E) Processo ARMA

Il tipico modello di regressione non lineare nei parametri è rappresentabile come la somma di due componenti

$$z_t = z(t) = f(\beta, t) + \varepsilon(t) \quad (23)$$

dove  $Z(t)$  è la risposta del sistema dipendente dal tempo  $t$ , mentre  $f(\beta, t)$  è la componente deterministica, funzione reale dell'incognito parametro  $\beta$  e del tempo  $t$ . La seconda componente  $\varepsilon(t)$  è invece un processo stocastico che rappresenta il disturbo residuale.

Differenziando tale modello è possibile individuare la somma delle medie, pur mantenendo i residui autocorrelati, ovvero dipendenti dalle precedenti osservazioni:

$$\varepsilon(t) = z'(t) - f'(\beta, t) \quad (24)$$

Tale procedura individua una media stazionaria in 0 che mantiene una struttura di variabilità autocorrelata invariata.

I processi ARMA (*AutoRegressive Moving Average*) studiano appositamente tale struttura. Data una certa serie storica, i modelli ARMA (o anche modelli Box-Jenkins) sono un utile strumento per studiare e predire i valori futuri di tale serie. I processi ARMA ( $p, q$ ) sono composti normalmente da due parti, una auto regressiva (AR) ed una parte a media mobile (MA), dove  $p$  rappresenta l'ordine della prima parte, mentre  $q$  l'ordine della parte della media mobile. I modelli ARMA ipotizzano che sia già stata applicata una differenziazione, per cui si otterrà:

$$\phi(B)Z(t) = \vartheta(B)a_t \quad (25)$$

dove  $B$  rappresenta un operatore di retrocessione che ha il compito di retrocedere il riferimento di un processo,  $Z(t)$  è il processo osservabile, mentre  $a_t$  è un *white noise* con media nulla. La componente a sinistra dell'equazione rappresenta la parte auto regressiva, mentre quella di destra è la parte di media mobile del processo ARMA. Esplicitando gli operatori  $\phi, \vartheta$  si avrà:

$$\phi = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Z(t) \quad (26)$$

$$\vartheta = (1 - \vartheta_1 B - \vartheta_2 B^2 - \dots - \vartheta_q B^q) a(t) \quad (27)$$

sostituendo nell'equazione precedente ed ordinando i vari parametri si otterrà:

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p} = a_t - \vartheta_1 Z_{t-1} - \dots - \vartheta_q Z_{t-q} \quad (28)$$

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \vartheta_1 Z_{t-1} - \dots - \vartheta_q Z_{t-q} \quad (29)$$

che altro non è che una versione lineare della  $z_t = f(\beta, t) + \varepsilon(t)$ , facendo dipendere l'ordine di grandezza della  $Z_t$  da parametri lineari che l'hanno preceduto.

### E.1) Processi ARMAX

Può essere di grande utilità ritenere che la risposta del sistema possa essere funzione oltre che di alcune componenti ritardate della risposta  $Z_t$  anche di ingressi autonomi o ritardati di un input esogeno esterno  $X_t$ , ad esempio un'altra serie storica:

$$\phi(B)Z_t = \omega(B)X_t + \vartheta(B)a_t \quad (30)$$

Sarà possibile in questo modo individuare un processo ARMA con repressore (ARMAX) semplicemente identificando un modello di trasferimento non lineare utilizzando una procedura di stima: è sufficiente realizzare la stima dei parametri  $\beta$  secondo i minimi quadrati non lineari standard, trascurando la struttura più complessa dell'errore  $\varepsilon$ . Si potrà utilizzare così i valori stimati  $\widehat{X}_t = f(\widehat{\beta}, t)$  in luogo del repressore  $X_t$ , utilizzando come trend e guida una  $\widehat{X}_t$  stimata tramite i suoi parametri. Si otterrà così

$$\phi(B)(Z_t - X_t) = \vartheta(B)a_t \quad (31)$$

o meglio

$$\phi(B)(Z_t - aX_t - bX_{t-c}) = \vartheta(B)a_t \quad (32)$$

### E.2) Processi SARMAX

Potrebbe risultare utile lo studio secondo i modelli ARMAX anche di una componente stagionale, indagabile grazie ad un processo SARMAX  $(p,q;P,Q)$ . Si otterrà allora

$$\Psi_P(B^S)(Z_t - \xi(B)X_t) = \Theta_Q(B^S)a_t . \quad (33)$$

Sarà possibile in seguito introdurre anche gli operatori  $\phi_p(B), \vartheta_q(B)$  dopo aver eseguito un preliminare controllo a passo s.

### F) Modello Guseo-Guidolin

I processi di diffusione di un'innovazione vengono generalmente descritti a livello aggregato dai modelli standard di Bass e di Bass generalizzato. Tuttavia, l'accresciuta importanza rivolta ai canali di marketing e più in generale alla comunicazione fra agenti suggeriscono l'ipotesi che tali sforzi condizionino il processo di diffusione e la struttura del mercato potenziale, non considerate dai suddetti modelli. Il modello ipotizzato da Guseo e Guidolin parte dalle ipotesi che il mercato potenziale non sia costante, ma abbia una struttura variabile dipendente dal processo di comunicazione. Conseguentemente la comunicazione e l'adozione sono due fasi distinte che dovranno essere modellate separatamente.

Il modello parte dall'assunzione che il mercato potenziale  $k$  dipenda dalla costruzione di una conoscenza collettiva, cioè dalla diffusione dell'informazione fra i membri di un sistema, tramite un network. La dinamica di diffusione dell'informazione è descritta per mezzo di un'equazione differenziale del tipo

$$v'(t) = p_c(1 - v(t)) + q_c v(t)(1 - v(t)) - e_c v(t) - w_c v^2(t) \quad (34)$$

che, escludendo le componenti  $e_c$  e  $w_c$ , rappresenta un modello di Bass standard. La densità delle possibili relazioni binarie fra agenti (dette archi) attive al tempo  $t$  sarà

$$v(t) = \frac{1 - e^{-(p_c + q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c + q_c)t}} \quad (35)$$

che, moltiplicato in termini assoluti per l'insieme di tutte le possibili relazioni binarie  $U$ , darà il numero di archi attivi al tempo  $t$ ,  $Uv(t)$ . Ciò rappresenta il risultato aggregato della diffusione dell'informazione nel sistema.

È possibile definire quindi il mercato potenziale tenendo conto di questi elementi. Definendo il numero di persone informate  $k(t)$  come

$$k(t) = \sqrt{U} \sqrt{v(t)} \quad (36)$$

e utilizzandolo come limite massimo raggiungibile dal mercato potenziale, si avrà che:

$$m(t) = k \sqrt{v(t)} = \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c + q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c + q_c)t}}} \quad (37)$$

ottenendo così che il mercato potenziale dipenda da un processo di diffusione dell'informazione. Applicando infine tale formulazione del mercato potenziale al modello standard di Bass risulterà che:

$$z(t) = m(t) \frac{1 - e^{-(p_s + q_s)t}}{1 + \frac{q_s}{p_s} e^{-(p_s + q_s)t}} \quad (38)$$

$$z(t) = k \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c + q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c + q_c)t}}} \frac{1 - e^{-(p_s + q_s)t}}{1 + \frac{q_s}{p_s} e^{-(p_s + q_s)t}} . \quad (39)$$

Questa nuova formulazione del modello di Bass permette di mantenere distinte le fasi di informazione e di adozione del prodotto, ed inoltre sarà possibile valutare l'impatto delle strategie di marketing e di confrontare i differenti contesti di diffusione utilizzando solo i dati relativi alle vendite.

## BIBLIOGRAFIA

Bass F.M. [1969], *A new product growth model for consumers durables*, in *Management Science*, Vol. 15, No. 5, Theory Series, January 1969, pp. 215-227.

ID. [2004], *Comments on "A New Product Growth for Model Consumer Durables"*. *The Bass Model*, in *Management Science*, Vol. 50, No. 12 Supplement, December 2004, pp. 1833–1840.

Bass F.M., Krishnan T.V., Jain D.C. [1994], *Why the Bass Model fits without decision variables*, in *Marketing Science*, Vol. 13, No. 3, Summer 1994, pp. 203-223.

Carrara L. [2009], *Markbass MoMark*, in *Guitar Club*, n. 9, Settembre 2009, Il Volo s.r.l. Editore, Milano.

Centro ASK [2007], *Economia della musica in Italia. Rapporto 2007*, Università Commerciale Luigi Bocconi, Milano.

Dismamusica [2009], *Speciale dati di mercato 2009*, Comunicato ufficiale, <http://www.dismamusica.it/index.php/datidimercato/dati-2009>.

Franses P.H. [1998], *Key features of economic time series*, in *Time series models for business and economic forecasting*, Cambridge University Press, Cambridge pp. 8-30.

ID. [1998], *Useful concepts in univariate time series analysis*, in *Time series models for business and economic forecasting*, Cambridge University Press, Cambridge pp. 31-66.

Guseo R. [2004a], *Organizzazione statistica dell'informazione e scelte di gestione: Teoria, tecniche e mini-stage aziendali*, Seconda edizione, Cedam, Padova.

ID. [2004b], *Interventi strategici e aspetti competitivi nel ciclo di vita di innovazioni*, Working Paper Series, N. 11, November 2004, Department of Statistical Sciences, University of Padua.

Guseo R., Dalla Valle A., Guidolin M. [2007], *World Oil Depletion Models: Price Effects Compared with Strategic or Technological Interventions*, in *Technological Forecasting and Social Change*, 74(4), pp. 452 – 469.

Guseo R., Guidolin M. [2009], *Modelling a dynamic market potential: A class of automata networks for diffusion of innovation*, in *Technological Forecasting and Social Change*, 76 (6), pp. 806-820.

ID. [2011], *Market potential dynamics in innovation diffusion: Modelling the synergy between two driving forces*, in *Technological Forecasting and Social Change*, Vo. 78, Issue 1, January 2011, pp. 13-24.

Herrera J. [2009], *Markbass. Mark Studio 1*, in *Bass Player Magazine*, Maggio 2009.

ICE, *Schede prodotto*, <http://appsrv.ice.gov.it/spol/prodotto.asp>.

Infocamere S.C.p.A., [2010], Bilancio Parsek s.r.l. al 31/12/2009, Archivio ufficiale delle C.C.I.A.A., <http://www.registroimprese.it/>.

IULM [2008], *Economia della musica in Italia. Rapporto 2008*, Fondazione Università IULM, Milano.

ID. [2009], *Economia della musica in Italia. Rapporto 2009*, Fondazione Università IULM, Milano.

ID. [2010], *Economia della musica in Italia. Rapporto 2010*, Fondazione Università IULM, Milano.

Lopes E. [2010], *Markbass. Il successo che fa eco*, in *Abruzzo impresa*, n. 48, pp. 42-47, Novembre 2010.

Murray P. [2007], *Markbass Magazine*, Issue 2.

Norton J.A., Bass F.M. [1987], *A diffusion theory model of adoption and substitution for successive generations of high-technology products*, in *Management Science*, Vol. 33, No. 9, September 1987, pp. 1069-1086.

Pankratz A. [1991], *Forecasting with Dynamic Regression Models*, John Wiley & Sons.

Piccolo D. [1990], *Introduzione all'analisi delle serie storiche*, La nuova Italia scientifica, Roma.